А. Ю. Кокотов, Представления C^*-алгебр ПДО в полиэдре, *Алгебра и анализ*, 1991, том 3, выпуск 3, 57–77

Алгебра и анализ
Том 3 (1991), вып. 3

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ C^*–АЛГЕБР ПДО В ПОЛИЭДРЕ

А. Ю. Кокотов

В работе исследуется спектр C^*-алгебры, порожденной псевдодифференциальными операторами в компактном теле с кусочно-гладкой границей.

Настоящая работа посвящена изучению C^*-алгебры ПДО (псевдодифференциальных операторов) в компактном теле с кусочно-гладкой границей.

Если M — гладкое компактное многообразие без края, то структура спектра (множества классов эквивалентных неприводимых представлений) C^*-алгебры ΨM, порожденной ПДО в пространстве $L_2(M)$, очень проста: алгебра ΨM становится коммутативной после факторизации по идеалу $KL_2(M)$ компактных операторов, и, следовательно, все неприводимые представления ΨM, кроме тождественного, одномерны. Спектр алгебры ΨM несколько расширяется, если у многообразия M появляется край – возникают две новые серии представлений, одна из которых состоит из бесконечномерных представлений. Дело еще более усложняется, если рассмотреть негладкую ситуацию — допустить разрывы в символах ПДО или особенности края многообразия. Первый случай исследовался в [1], мы будем заниматься вторым, ограничившись рассмотрением тел в R^n. Переход к многообразиям дополнительных трудностей не вызывает.

§ 1. Постановка задачи

Пусть T — компактное тело в R^n с кусочно-гладкой границей („полиэдр“). Определим конус $K(t)$, касательный к T в точке $t \in T$, как $\bigcap\limits_{\varepsilon>0} K_\varepsilon(t)$, где $K_\varepsilon(t)$ — минимальный замкнутый конус с вершиной в t, содержащий множество $T \cap B(t,\varepsilon)$; $B(t,\varepsilon)$ — шар с центром в t и радиуса ε.

Пусть K — конус в R^n. Определим сопряженный конус равенством

$$K^* = \{x \in R^n | \forall y \in K \quad xy \leqslant 0\}.$$

Назовем конус K допустимым, если выполнены следующие условия:

1) K — выпуклое множество,
2) $K = \mathrm{cl}(\mathrm{int} K)$,
3) $\mathrm{int} K^* \neq \varnothing$ (т.е. конус K — острый),
4) $\exists g : R^n \to R^n, g(0) = 0, \forall \lambda > 0 \quad g(\lambda x) = \lambda g(x), g|S^{n-1}$ — диффеоморфизм сферы $S^{n-1}, g(K) = P$, где P — полупространство R^n_+ или острый выпуклый многогранный (т.е. порожденный конечным набором точек) конус в R^n.

Мы предполагаем, что среди конусов, касательных к T в точках $t \in \partial T$, есть только допустимые конусы, полупространства или конусы, представимые в виде

Ключевые слова: C^*-алгебры, неприводимые представления, псевдодифференциальные операторы.

$K \times L^{n-s}$, где K — допустимый конус в R^s, L^{n-s} — линейное пространство размерности $n-s$. Кроме того, потребуем, чтобы для любой точки $t \in T$ существовал диффеоморфизм $h : R^n \to R^n$ такой, что $h(t) = t$ и $K(t) \cap V = h(U \cap T)$ для некоторых окрестностей $U, V \ni t$. Эти условия выполнены, если, например, T есть образ выпуклого многогранника при диффеоморфизме $R^n \to R^n$. (Не преследуя максимальной общности, можно ограничиться этим модельным случаем. Отметим, что класс допустимых конусов можно расширить, включив в него конечные пересечения острых выпуклых гладких конусов. Все дальнейшие рассмотрения распространяются и на эту ситуацию).

Введем C^*-алгебру ΨT, порожденную в $L_2(T)$ операторами вида $\Pi_T p(x, \mathcal{D})$; здесь Π_T — проектор $L_2(R^n) \to L_2(T)$ (оператор умножения на характеристическую функцию множества T), $p(x, \mathcal{D})$ — классический псевдодифференциальный оператор в R^n порядка не выше 0. В работе будут найдены все (с точностью до эквивалентности) неприводимые представления алгебры ΨT.

С помощью процесса локализации задача поиска этих представлений будет сведена к изучению спектра „локальных“ C^*-алгебр, порожденных мультипликаторами Фурье в конусе $K(t)$, касательном к T в точке $t \in T$. Мультипликаторами Фурье мы называем операторы вида $\Pi_{K(t)} F^{-1}_{\xi \to x} \Phi(\xi) F_{y \to \xi}$, где $\Pi_{K(t)}$ — оператор умножения на характеристическую функцию $K(t)$; F, F^{-1} — прямое и обратное преобразования Фурье в R^n, Φ — функция из $C^\infty(R^n \setminus 0)$, однородная степени 0. Эти операторы действуют в пространстве $L_2(K(t))$. Оказывается естественным рассматривать алгебры мультипликаторов Фурье, действующих в весовом пространстве $L_2(K(t), \rho)$. Если конус $K(t)$ острый, то роль веса ρ играет степень расстояния до вершины t конуса $K(t)$. Если $K(t)$ содержит $(n-s)$-мерную плоскость L, проходящую через t, то в качестве веса нужно взять степень расстояния до L.

В работе будут указаны все неприводимые представления этих алгебр. Представления алгебр „без веса“ вписываются в шкалу представлений алгебр „с весом“. Отметим, что алгебры мультипликаторов Фурье „с весом“ возникают в качестве „локальных алгебр“, если вместо классических ПДО рассматривать „ПДО в весовых классах на многообразии с особенностями“ [1].

Статья состоит из пяти параграфов. В § 2 обсуждается процесс локализации алгебр ПДО и формулируются необходимые вспомогательные результаты, полученные с помощью техники, основанной на преобразовании Меллина. В § 3 изучаются алгебры операторов на сфере, возникающие после применения преобразования Меллина к мультипликаторам Фурье, в § 4 — алгебры „трансверсальных операторов“, появляющихся после применения преобразования Фурье по части переменных, в § 5 указываются полные списки неприводимых представлений алгебр мультипликаторов Фурье в конусе „с весом“ и алгебры ΨT. Описание топологии Джекобсона на спектрах этих алгебр будет опубликовано отдельно. Ранее в статье [2] были получены полные результаты (все неприводимые представления и топология Джекобсона на спектре) для алгебры мультипликаторов Фурье в остром выпуклом гладком конусе пространства R^n.

Всюду далее под алгебрами и морфизмами понимаются C^*-алгебры и $*$-морфизмы.

§ 2. Переход к локальным алгебрам

Заметим, что алгебра ΨT, введенная в § 1, содержит идеал $KL_2(T)$ компактных операторов (и, следовательно, неприводима). В самом деле, любой компактный оператор в $L_2(R^n)$ приближается ПДО порядка $(-\infty)$ (например, интегральными операторами с ядрами из $C_0^\infty(R^n \times R^n)$).

Заметим также, что если порядок ПДО $p(x, \mathcal{D})$ меньше 0, то $\Pi_T p(x, \mathcal{D}) \in KL_2(T)$. Действительно, можно считать, что символ $p(x,\xi)$ финитен по x, и воспользоваться теоремой 2.1.1.1 [3].

В этом параграфе мы опишем фактор-алгебру $\Psi T/KL_2(T)$. Из предыдущего замечания следует, что это описание должно зависеть только от главных символов операторов, образующих алгебру ΨT.

Пусть $p(\cdot,\cdot) \in C^\infty(R^n \times (R^n \setminus 0))$, функция p однородна степени 0 по второму аргументу;

$E(\lambda)$ — оператор, определяемый равенством

$$(E(\lambda)u)(\varphi) = (2\pi)^{-n/2}\exp(i(i\lambda+n/2)\pi/2)\Gamma(i\lambda+n/2)\int\limits_{S^{n-1}}(-\varphi\omega+ \\ +i0)^{-i\lambda-n/2}u(\omega)d\omega,$$

где $u \in C^\infty(S^{n-1}), \varphi, \omega \in S^{n-1}$ (см. [1]);

$P_{\Omega(t)}$ — оператор умножения на характеристическую функцию множества $\Omega(t) = K(t) \cap S^{n-1}$. (Вершина конуса $K(t)$ считается помещенной в начало координат).

Введем алгебру Σ_T оператор-функций на $R \times T$. Она порождается оператор-функциями вида

$$\mathcal{U} : R \times T \ni (\lambda, t) \to P_{\Omega(t)}E^{-1}_{\omega\to\varphi}(\lambda)p(t,\omega)E_{\psi\to\omega}(\lambda) : \\ : L_2(\Omega(t)) \to L_2(\Omega(t)).$$

Операции в алгебре Σ_T поточечные, а норма равномерная:

$$\|\mathcal{U}(\cdot,\cdot);\Sigma_T\| = \sup\{\|\mathcal{U}(\lambda,t); BL_2(\Omega(t))\|; (\lambda,t) \in R \times T\}.$$

Теперь сформулируем основной результат настоящего параграфа.

Теорема 2.1. *Алгебры $\Psi T/KL_2(T)$ и Σ_T изоморфны. Изоморфизм осуществляется отображением*

$$[\sum_i \prod_j \Pi_T A_{ij}] \to \sum_i \prod_j \mathcal{U}_{ij}(\cdot,\cdot).^1$$

Здесь $A_{ij} = p_{ij}(x, \mathcal{D})$ — ПДО с главным символом $p^0_{ij}(x,\xi)$, $p^0_{ij}(\cdot,\cdot)$ — функция из $C^\infty(R^n \times (R^n \setminus 0))$, однородная степени 0 по второму аргументу, $[\sum_i \prod_j \Pi_T A_{ij}]$ — класс вычетов в фактор-алгебре $\Psi T/KL_2(T)$, $\mathcal{U}_{ij}(\cdot,\cdot) \in \Sigma_T$,

$$\mathcal{U}_{ij}(\lambda,t) = p_{\Omega(t)}E^{-1}_{\omega\to\varphi}(\lambda)P^0_{ij}(t,\omega)E_{\psi\to\omega}(\lambda) : L_2(\Omega(t)) \to L_2(\Omega(t)).$$

Прежде чем доказывать эту теорему, приведем сведения, необходимые для дальнейшего (за доказательствами отсылаем к [1]).

Обозначим через $L_2(R^n, |x|^\beta)$ пространство с нормой

$$\|u\| = (\int\limits_{R^n} |u(x)|^2 \quad |x|^{2\beta}dx)^{1/2}.$$

[1]Здесь (и всюду далее) индексы i и j пробегают произвольные конечные множества.

Пусть $x \in R^n$, $\varphi = x/|x| \in S^{n-1}$, $r = |x|$, $u \in C_0^\infty(R^n \setminus 0)$, $u(x) = u(r,\varphi)$.

Определим преобразование Меллина равенством

$$(M_{r\to\lambda}u)(\lambda,\varphi) = \int_0^{+\infty} r^{-i\lambda-1}u(r,\varphi)\,dr.$$

Пусть $\mathrm{Im}\lambda = \beta$, тогда оператор $M_{r\to\lambda+\mathrm{i}n/2}$ продолжается до унитарного оператора $L_2(R^n,|x|^\beta) \to L_2(R_\beta; L_2(S^{n-1}))$. Здесь и всюду дальше $R_\beta = \{z \in \mathbf{C}|\mathrm{Im}z = \beta\}$.

Если Φ — функция из $C^\infty(R^n \setminus 0)$, однородная степени 0, то оператор $F^{-1}_{\xi\to x}\Phi(\xi)F_{y\to\xi}$ осуществляет непрерывное отображение $L_2(R^n,|x|^\beta) \to L_2(R^n,|x|^\beta)$ при $|\beta| < n/2$. При таких β справедливо представление

$$(F^{-1}_{\xi\to x}\Phi(\xi)F_{y\to\xi}u)(r,\varphi) = (1/\sqrt{2\pi})\int_{\mathrm{Im}\lambda=\beta} r^{i(\lambda+\mathrm{i}n/2)}E^{-1}_{\omega\to\varphi}(\lambda)\times$$
$$\times\Phi(\omega)E_{\theta\to\omega}(\lambda)M_{\rho\to\lambda+\mathrm{i}n/2}u(\rho,\theta)\,d\lambda = M^{-1}_{\lambda+\mathrm{i}n/2\to r}\times$$
$$\times E^{-1}_{\omega\to\varphi}(\lambda)\Phi(\omega)E_{\theta\to\omega}(\lambda)M_{\rho\to\lambda+\mathrm{i}n/2}u(\rho,\theta). \tag{2.1}$$

(Через $M^{-1}_{\lambda+\mathrm{i}n/2\to r}$ обозначено обратное преобразование Меллина).

Пусть K — конус в R^n,$\Omega = K \cap S^{n-1}$. Обозначим через M_K^β алгебру, порожденную мультипликаторами Фурье $\Pi_K F^{-1}_{\xi\to x}\Phi(\xi)F_{y\to\xi}$ в $L_2(K,|x|^\beta) = \Pi_K(L_2(R^n,|x|^\beta))$, а через $S_\Omega(R_\beta)$ — алгебру, порожденную оператор-функциями $R_\beta \ni \lambda \to PE^{-1}_{\omega\to\varphi}(\lambda)\Phi(\omega)F_{\psi\to\omega}(\lambda) : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$. Операции в $S_\Omega(R_\beta)$ поточечные, норма равномерная ($\|\mathcal{U}(\cdot); S_\Omega(R_\beta)\| = \sup\{\|\mathcal{U}(\lambda); BL_2(\Omega)\|; \lambda \in R_\beta\}$). Из представления (2.1) следует, что алгебры M_K^β и $S_\Omega(R_\beta)$ изоморфны.

Пусть $H^s(S^{n-1})$ — пространство Соболева–Слободецкого, $|\mathrm{Im}\lambda| < n/2$, тогда отображения $E(\lambda) : H^s(S^{n-1}) \to H^{s+\mathrm{Im}\lambda}(S^{n-1})$ и $E^{-1}(\lambda) : H^s(S^{n-1}) \to H^{s-\mathrm{Im}\lambda}(S^{n-1})$ непрерывны. Справедливо равенство $(E(\lambda))^* = E^{-1}(\overline{\lambda})$($*$ — сопряжение относительно скалярного произведения в $L_2(S^{n-1})$). Если $\mathrm{Im}\lambda = 0$, то оператор $E(\lambda) : L_2(S^{n-1}) \to L_2(S^{n-1})$ унитарный.

Приведем также аналог теоремы Пэли–Винера для оператора $E(\lambda)$[2].

Пусть $\mathrm{Im}\lambda = \beta$,$|\beta| < n/2$,$\Omega = K \cap S^{n-1}$, где K допустимый конус в R^n. Тогда если функция $w \in H^\beta(S^{n-1})$, распространенная на $R^n \setminus 0$ как однородная степени $i\lambda + n/2$, является граничным значением (в смысле теории распределений) функции G, голоморфной в области $R^n + i(\mathrm{int}K^*)$ и удовлетворяющей оценке $|G(z)| \leqslant \mathrm{const}(1 + |z|^2)^\alpha(1 + (\mathrm{dist}(\mathrm{Im}z, \partial K^*))^{-\gamma})$ для некоторых $\alpha,\gamma \geqslant 0$, то справедливо включение $w \in E(\lambda) \times (P_\Omega L_2(S^{n-1})) = E(\lambda)(L_2(\Omega))$. Обратно, если $u \in L_2(S^{n-1})$,$\mathrm{supp}u \subset \Omega$, то функция $w = E(\lambda)u$ обладает всеми перечисленными свойствами.

Для доказательства теоремы 2.1 нам понадобятся две леммы.

Лемма 2.2. *Пусть*

$$A = \sum_i \prod_j \Pi_T p_{ij}(x,D) \in \Psi T, \quad \mathcal{U}(\lambda,t) = \sum_i \prod_j P_{\Omega(t)}E^{-1}_{\omega\to\varphi}(\lambda)p^0_{ij}(t,\omega)E_{\psi\to\omega}(\lambda).$$

Если при любых $t \in T$,$\lambda \in R$ оператор $\mathcal{U}(\lambda,t) : L_2(\Omega(t)) \to L_2(\Omega(t))$ обратим и $\mathrm{supp}\{\|\mathcal{U}^{-1}(\lambda,t); BL_2(\Omega(t))\|; (\lambda,t) \in R \times T\} < \infty$, то оператор $A : L_2(T) \to L_2(T)$ фредгольмов.

Доказательство. Оператор A — оператор локального типа (в смысле Симоненко (см., например, [4])). Он фредгольмов, если для любой точки $t \in T$ существует оператор $A(t)$, локально эквивалентный A в точке t и локально фредгольмовый в t. Пусть $t \in T$; не умаляя общности, можно считать, что t совпадает с началом координат. Положим

$$[A(t)u](r,\varphi) = M^{-1}_{\lambda+\mathrm{i}n/2\to r}\mathcal{U}_{\psi\to\varphi}(\lambda,t)M_{\rho\to\lambda+\mathrm{i}n/2}u(\rho,\psi).$$

Нетрудно убедиться, что оператор $A(t)$ локально эквивалентен оператору A в t и обладает локальным регуляризатором $R(t)$,

$$[R(t)u](r,\varphi) = M^{-1}_{\lambda+\mathrm{i}n/2\to r}\mathcal{U}^{-1}_{\psi\to\varphi}(\lambda,t)M_{\rho\to\lambda+\mathrm{i}n/2}u(\rho,\psi). \quad \bullet$$

Лемма 2.3. *Пусть A, $\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$ те же, что и в лемме 2.2. Тогда если оператор A фредгольмов, то при всех $(\lambda,t) \in R\times T$ оператор $\mathcal{U}(\lambda,t)$ обратим.*

Доказательство. Для любой функции $u \in L_2(T)$ должны выполняться оценки

$$\|u\| \leqslant c(\|Au\| + \|K_1u\|) \text{ и } \|u\| \leqslant c(\|A^*u\| + \|K_2u\|) \qquad (*)$$

при некоторых K_1,$K_2 \in KL_2(T)$. Пусть $\lambda_0 \in R$,$t_0 \in T$ и оператор $\mathcal{U}(\lambda_0,t_0)$ необратим. Тогда возможны следующие случаи:

1)$\exists u_0 \in L_2(\Omega(t_0)), \|u_0\| = 1, \mathcal{U}^*(\lambda_0,t_0)u_0 = 0$.

2)$\exists u_k \in L_2(\Omega(t_0)), \|u_k\| = 1, \|\mathcal{U}(\lambda_0,t_0)u_k\| \to 0$.

Опять можно считать, что t_0 совпадает с началом координат. Пусть $w_k = u_0$ в первом случае и $w_k = u_k$ во втором. Пусть $\zeta_k \in C_0^\infty(R)$, $\operatorname{supp}\zeta_k \to \lambda_0$,$\|M^{-1}_{\lambda+\mathrm{i}n/2\to r}\zeta_k(\lambda)w_k; L_2(R^n)\| = 1$,$s_k \in R$,$s_k \to 0+$, положим

$$f_k(r,\varphi) = (s_k)^{-n/2}M^{-1}_{\lambda+\mathrm{i}n/2\to(r/s_k)}(\zeta_k(\lambda)w_k(\varphi)).$$

Ясно, что f_k слабо сходится к нулю в $L_2(T)$. Пусть $\chi \in C_0^\infty(R^n)$,$\chi(x) = 1$, если $|x| < \varepsilon/2$, $\chi(x) = 0$, если $|x| > \varepsilon$. В случае 1) имеем

$$A^*f_k = A^*([\chi + (1-\chi)]f_k) = \chi A^*f_k + Kf_k + A^*(1-\chi)f_k,$$

где $K = [A^*,\chi] \in KL_2(T)$. Первое слагаемое стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, второе и третье стремятся к нулю при $k \to \infty$ (ср.[1], доказательство 4.4.1). Следовательно, вторая из оценок $(*)$ опровергается с помощью последовательности f_k. Аналогично в случае 2) опровергается первая из оценок $(*)$. $\bullet$

Доказательство теоремы 2.1. Пусть A,$\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$ — те же, что и в лемме 2.2. Для доказательства теоремы достаточно установить равенство

$$\inf\{\|A+P; BL_2(T)\|; P \in KL_2(T)\} = \|\mathcal{U}(\cdot,\cdot); \Sigma_T\|.$$

Пусть $\alpha > \|\mathcal{U}(\cdot,\cdot);\Sigma_T\|$. Тогда оператор $\mathcal{U}(\lambda,t)U^*(\lambda,t) - \alpha^2 I$ обратим для любых $\lambda \in R$, $t \in T$. Имеем оценку $\|(\mathcal{U}(\lambda,t)\mathcal{U}^*(\lambda,t) - \alpha^2 I)^{-1}\| \leqslant 1/(\alpha^2 - \|\mathcal{U}(\lambda,t)\mathcal{U}^*(\lambda,t)\|) \leqslant (\alpha^2 - \|\mathcal{U}(\cdot,\cdot);\Sigma_T\|^2)^{-1}$. По лемме 2.2 оператор $AA^* - \alpha^2 I$ фредгольмов. Значит, $\alpha^2 > r([AA^*])$, где $([AA^*])$ — спектральный радиус элемента $[AA^*]$ алгебры $\Psi T/KL_2(T)$. Заметим, что $([AA^*]) = \|[AA^*]\| = \inf\{\|AA^* + P\|;\ P \in KL_2(T)\} = \inf\{\|A+P\|^2; P \in KL_2(T)\} = \|[A]\|^2$. Значит, $\alpha > \|[A]\|$. Таким образом, $\|\mathcal{U}(\cdot,\cdot);\Sigma_T\| \geqslant \|[A]\|$. Установим противоположное неравенство.

Пусть $\alpha > \|[A]\|$. Тогда класс вычетов $[AA^*] - \alpha^2[I]$ обратим в фактор-алгебре $\Psi T/KL_2(T)$. Значит, оператор $AA^* - \alpha^2 I$ фредгольмов. По лемме 2.3 оператор $\mathcal{U}(\lambda,t)\mathcal{U}^*(\lambda,t) - \alpha^2 I$ обратим для всех $(\lambda,t) \in R\times T$. Отсюда следует, что $\alpha^2 > r(\mathcal{U}(\lambda,t)\mathcal{U}^*(\lambda,t)) = \|\mathcal{U}(\lambda,t)\|^2$ и, следовательно, $\alpha > \|\mathcal{U}(\cdot,\cdot);\Sigma_T\|$. Таким образом, $\|[A]\| \geqslant \|\mathcal{U}(\cdot,\cdot);\Sigma_T\|$. $\bullet$

В следующих двух параграфах мы будем исследовать спектры „локальных“ алгебр, порожденных сужениями оператор-функций из Σ_T на множества вида $R \times \{t\}$ $(t \in T)$. Эти алгебры изоморфны алгебрам мультипликаторов Фурье в конусах $K(t)$. Переход от спектров „локальных“ алгебр к спектру алгебры ΨT будет осуществлен в § 5.

§ 3. Алгебры операторов на сфере

Пусть K — выпуклый конус в R^n, $\mathrm{int}K \neq \varnothing, \Omega = K \cap S^{n-1}$. Алгебра M_K^β мультипликаторов Фурье в весовом пространстве $L_2(K, |x|^\beta)$ изоморфна алгебре $S_\Omega(R_\beta)$. Фиксируем $\lambda \in R_\beta$ и рассмотрим алгебру $S_\Omega(\lambda)$, порожденную значениями оператор-функций из $S_\Omega(R_\beta)$ в точке λ. Здесь и всюду далее $\mathrm{Im}\lambda = \beta, |\beta| < n/2$. Результаты этого параграфа допускают обобщение и на другие значения β, но мы не будем на этом останавливаться (ср. [1]).

Алгебры $M_K^\beta, S_\Omega(R_\beta), S_\Omega(\lambda)$ в случае, если $K = R^n$ или R^n_+ изучались в [1]. Напомним основные сведения о них:

Пусть $K = R^n$, тогда $\Omega = S^{n-1}$. Обозначим в этом случае $S_\Omega(R_\beta)$ через $S(R_\beta)$, а $S_\Omega(\lambda)$ через $S(\lambda)$. Алгебра $S(\lambda)$ неприводима, если $\beta \neq 0$. Если $\beta = 0$, то имеют место изоморфизмы $M^0_{R^n} \approx S(R_0) \approx S(\lambda) \approx C(S^{n-1})$.

Пусть $K = R^n_+$, тогда $\Omega = S^{n-1}_+$. В этом случае обозначим $S_\Omega(\lambda)$ через $S_+(\lambda)$. Алгебра $S_+(\lambda)$ неприводима, если $\beta \neq 0$, и приводима, если $\beta = 0$.

Если K — допустимый конус, то результат выглядит иначе. Алгебра $S_\Omega(\lambda)$ оказывается неприводимой при любом β $(|\beta| < n/2)$. При $\beta = 0$ алгебр $S_\Omega(\lambda)$ очень похожа на алгебру многомерных операторов Винера–Хопфа в конусе K[5,6]. В этом случае при доказательстве неприводимости алгебры $S_\Omega(\lambda)$ удается воспользоваться методом работы [6]. Доказательство неприводимости $S_\Omega(\lambda)$ при $\beta \neq 0$ требует иных соображений.

Всюду до конца этого параграфа под K понимается фиксированный допустимый конус в $R^n, \Omega = K \cap S^{n-1}$.

Теорема 3.1. *Алгебра $S_\Omega(\lambda)$ неприводима и содержит идеал $KL_2(\Omega)$ компактных операторов.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\mathrm{Im}\lambda = 0$. Тогда оператор $E(\lambda)$ — унитарный в $L_2(S^{n-1})$, стало быть, $(E^{-1}_{\omega\to\varphi}(\lambda)\Phi(\omega)E_{\psi\to\omega}(\lambda))^* = E^{-1}_{\omega\to\varphi}(\lambda)\overline{\Phi}(\omega) E_{\psi\to\omega}(\lambda)$. Введем в рассмотрение алгебру S, порожденную в $L_2(S^{n-1})$ операторами P_Ω и $E^{-1}_{\omega\to\varphi}(\lambda)\Phi(\omega)E_{\psi\to\omega}(\lambda)$. Ясно, что $P_\Omega S P_\Omega = S_\Omega(\lambda)$. Покажем, что алгебра S неприводима. Алгебра S изоморфна алгебре $\tilde{S}$, порожденной операторами $E(\lambda)P_\Omega E^{-1}(\lambda)$ и операторами умножения на гладкие функции Φ в $L_2(S^{n-1})$.

Пусть $R \in (\tilde{S})'((\tilde{S})'$ — коммутант алгебры $\tilde{S}$). Тогда R совпадает с оператором умножения на функцию $r \in L_\infty(S^{n-1})$. (Можно положить $r(\omega) = R(\Psi)(\omega)/\Psi(\omega)$, для $\omega \in \mathrm{supp}\Psi, \Psi \in C^\infty(S^{n-1})$. Определение, очевидно, корректно. Включение $r \in L_\infty(S^{n-1})$ следует из оценки $\|r^2\varphi^2; L_1(S^{n-1})\| = \|R\varphi; L_2(S^{n-1})\|^2 \leqslant \|R\|^2\|\varphi^2; L_1(S^{n-1})\|$). Таким образом, $(\tilde{S})'$ — коммутативная алгебра. Покажем, что она является областью целостности. Тогда в силу теоремы Гельфанда $(\tilde{S})' \approx \mathbf{C}$, что эквивалентно неприводимости S.

Пусть $R_1, \quad R_2 \in (\tilde{S})', R_k(\varphi) = r_k\varphi, \quad r_k \in L_\infty(S^{n-1}), k = 1, 2$. Предположим, что $r_1 r_2 = 0$ почти всюду на S^{n-1}. Обозначим через $\log\zeta$ аналитическое продолжение натурального логарифма в область $\mathbf{C} \setminus \{\zeta | \mathrm{Re}\zeta = 0, \mathrm{Im}\zeta \leqslant 0\}$. Пусть $0 < \varepsilon < 1/2, f \in$

$C_0^\infty(\Omega), f \geqslant 0, f \not\equiv 0$. Положим

$$u_0(z) = \Big(\int_\Omega (-z\omega)^\varepsilon f(\omega)\,d\omega\Big)^{(i\lambda+n/2)/\varepsilon},$$

где ζ^α понимается как $\exp(\alpha \log\zeta)$.

Легко видеть, что функция u_0 определена и голоморфна в области $R^n + i(\mathrm{int}K^*)$ и удовлетворяет оценке $|u_0(z)| \leqslant \mathrm{const}\cdot|z|^{n/2}$. Теперь из аналога теоремы Пэли–Винера для $E(\lambda)$ заключаем, что $w_0 = u_0|S^{n-1} \in E(\lambda)(L_2(\Omega))$. Ясно, что функция w_0 отлична от нуля всюду на S^{n-1}. Положим $w_k = r_k w_0$, $k = 1,2$. Очевидно, что $E(\lambda)P_\Omega E(\lambda)^{-1}w_k = r_k E(\lambda)P_\Omega E^{-1}(\lambda)w_0 = r_k w_0 = w_k$. Значит, $w_k \in E(\lambda)(L_2(\Omega))$ и, стало быть, в силу аналога теоремы Пэли–Винера для $E(\lambda)$, после распространения на $R^n \setminus 0$ по однородности (степени $i\lambda + n/2$) функция w_k совпадает с граничным значением функции, голоморфной в $R^n + i(\mathrm{int}K^*)$. Итак,

$$w_k = \lim_{y\to 0, y\in \mathrm{int}K^*} U_k(\cdot + iy),$$

где U_k — функция, голоморфная в $R^n + i(\mathrm{int}K^*)$. Предел понимается в смысле сходимости распределений. Функция $U = U_1U_2$ голоморфна в $R^n + i(\mathrm{int}K^*)$ и имеет граничное значение, равное нулю почти всюду в R^n. Пусть $y_0 \in \mathrm{int}K^*$, $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$. Рассмотрим функцию

$$F(\zeta) = \int_{R^n} \varphi(x)U(x + \zeta y_0)\,dx.$$

Она определена и голоморфна в верхней полуплоскости $\{\zeta \in \mathbf{C} | \mathrm{Im}\zeta > 0\}$. Имеем

$$\lim_{s\to 0+} F(p+is) = \lim_{s\to 0+}\int_{R^n} \varphi(x)U(x + (p+is)y_0)\,dx =$$
$$= \lim_{s\to 0+}\int_{R^n} \varphi(x - py_0)U(x + isy_0)dx =$$
$$= \int_{R^n} \varphi(x - py_0)r_1(x)r_2(x)(w_0(x))^2\,dx = 0.$$

Следовательно, $F \equiv 0$. Отсюда выводим, что

$$\int_{R^n} \varphi(x)U(x + iy_0)\,dx = 0$$

для любой функции φ из $C_0^\infty(R^n)$ и, значит, $U|(R^n + iy_0) \equiv 0$. Отсюда следует, что $U \equiv 0$ и, стало быть, одна из функций U_1,U_2 обращается в нуль тождественно. Значит, $r_1w_0 = 0$ или $r_2w_0 = 0$ почти всюду. Так как $w_0 \neq 0$ на S^{n-1}, то r_1 или r_2 обращается в нуль почти всюду. Стало быть, $(\tilde{S})'$ — область целостности и алгебра S неприводима.

Пусть $\Omega^* = K^* \cap S^{n-1}$, $\Phi_0 \in C_0^\infty(\Omega^*)$, $\chi_\varepsilon \in C_0^\infty(S^{n-1})$, $\chi_\varepsilon|\Omega = 1$, $\chi_\varepsilon = 0$ вне ε-окрестности множества Ω (ε достаточно мало). Тогда $P_\Omega E^{-1}(\lambda)\Phi_0 E(\lambda) = P_\Omega\chi_\varepsilon E^{-1}(\lambda)\Phi_0 E(\lambda)$. Оператор $\chi_\varepsilon E^{-1}(\lambda)\Phi_0 E(\lambda)$ — мероморфный псевдодифференциальный оператор с символом, обращающимся в нуль в окрестности подмногообразия $V(n,2)$ взаимно ортогональных единичных векторов в $S^{n-1}\times S^{n-1}$. Значит

([1], лемма 5.3.5), он компактен в $L_2(S^{n-1})$. Поэтому оператор $P_\Omega E^{-1}(\lambda)\Phi_0 E(\lambda)$ из алгебры S компактен в $L_2(S^{n-1})$. Итак, алгебра S неприводима и содержит компактный оператор. Значит ([7], 4.1.10), $KL_2(S^{n-1}) \subset S$. Вспоминая, что $P_\Omega S P_\Omega = S_\Omega(\lambda)$, заключаем, что $P_\Omega KL_2(S^{n-1})P_\Omega = KL_2(\Omega) \subset S_\Omega(\lambda)$. Отсюда следует, что алгебра $S_\Omega(\lambda)$ неприводима. Случай $\mathrm{Im}\lambda = 0$ разобран.

Пусть теперь $\mathrm{Im}\lambda = \beta, \beta \neq 0$. Сделаем предварительно следующее замечание.

Замечание 3.2. Пусть $u \in C^N(S^{n-1})$, где N — достаточно большое число, $\mathrm{supp}\, u \subset \Omega$. Продолжим u на $R^n \setminus 0$ по однородности (степени $i\lambda - n/2$). Тогда $(Fu)|S^{n-1} = E(\lambda)(u|S^{n-1})$ (см.[1]). Пусть G — преобразование Фурье–Лапласа от u (функция, голоморфная в области $R^n + i(\mathrm{int}K^*)$ (см.[8], § 7.4)). Справедливо равенство

$$(Fu)(x) = \lim_{y\to 0, y\in \mathrm{int}K^*} G(x+iy), x \neq 0.$$

Действительно, пусть $\chi_0, \chi_\infty \in C^\infty(R^n), \chi_0 + \chi_\infty = 1$, $\chi_0 = 1$ в окрестности нуля, $\chi_\infty = 1$ в окрестности бесконечности. Так как $|\mathrm{Im}\lambda| < n/2$, то $\mathrm{Re}(i\lambda - n/2) > -n$ и

$$G(x+iy) = \int\limits_{R^n} u(\xi)e^{-i\xi(x+ij)}d\xi = \int\limits_{R^n} \chi_0(\xi)u(\xi)e^{-ix\xi+y\xi}d\xi +$$
$$+ \int\limits_{R^n} \chi_\infty(\xi)u(\xi)e^{-ix\xi+y\xi}d\xi = \int\limits_{R^n} \chi_0(\xi)u(\xi)e^{-ix\xi+y\xi}d\xi +$$
$$+(-1)^{|\alpha|}\int\limits_{R^n}(\partial^{|\alpha|}/\partial\xi^\alpha)(\chi_\infty(\xi)u(\xi))e^{-ix\xi+y\xi}/(-ix+y)^\alpha d\xi.$$

Здесь число $|\alpha|$ столь велико, что $\partial^{|\alpha|}/\partial\xi^\alpha(\chi_\infty(\xi)u(\xi)) \in L_1(R^n)$. Теперь можно устремить y к нулю внутри конуса K^* и получить поточечную сходимость. (Аналог теоремы Пэли–Винера для $E(\lambda)$ дает сходимость только в смысле распределений).

Обозначим через H инвариантное подпространство для алгебры $S_\Omega(\lambda)$. Нужно доказать, что $H = L_2(\Omega)$ или $H = \{0\}$. Покажем, что в H или в его ортогональном дополнении $H^\perp$($H^\perp$ — также инвариантное подпространство для $S_\Omega(\lambda)$) содержится сколь угодно гладкая функция, отличная от тождественного нуля.

Пусть $f \in C_0^\infty(R^n \setminus 0), \mathrm{supp} f \subset \mathrm{int}K$. Положим

$$\Phi_0(z) = \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_{R^n} f(\xi)(z,\xi)e^{-it(z,\xi)}\, d\xi.$$

Легко видеть, что $\Phi_0(pz) = \Phi_0(z)$ для любого $p > 0$ и что функция $\Phi_0(z)$ голоморфна в $R^n + i(\mathrm{int}V)$, где V — конус в R^n, $\mathrm{int}V \cup \{0\} \supset K^*$. Отсюда следует, что $\sup\{|\Phi_0(z)|;\ z \in R^n + iK^*\} < +\infty$. Пусть теперь $u \in L_2(\Omega)$. Тогда функция $\Phi_0(\omega)E_{\psi\to\omega}(\lambda)u(\psi)$, распространенная как однородная степени $i\lambda + n/2$ на $R^n \setminus 0$, продолжается голоморфно в область $R^n + i(\mathrm{int}K^*)$ и удовлетворяет там оценке из аналога теоремы Пэли–Винера для $E(\lambda)$. Значит, $P_\Omega E^{-1}(\lambda)\Phi_0 E(\lambda)u = E^{-1}(\lambda)\Phi_0 E(\lambda)u$. Аналогично $P_\Omega E(\overline{\lambda})^{-1}\Phi_0 E(\overline{\lambda}) = E(\overline{\lambda})^{-1}\Phi_0 E(\overline{\lambda})$; ясно, что $P_\Omega E(\overline{\lambda})^{-1}\Phi_0 E(\overline{\lambda}) = [P_\Omega E^{-1}(\lambda)\overline{\Phi}_0 E(\lambda)]^* \in S_\Omega(\lambda)$.

Компактный и самосопряженный в $L_2(\Omega)$ оператор

$$(E^{-1}(\lambda)\Phi_0 E(\lambda) - E^{-1}(\overline{\lambda})\Phi_0 E(\overline{\lambda}))^N (P_\Omega E^{-1}(\overline{\lambda})\overline{\Phi}_0 E(\overline{\lambda}) - P_\Omega E^{-1}(\lambda)\overline{\Phi}_0 E(\lambda))^N \in S_\Omega(\lambda)$$

действует непрерывно из $L_2(S^{n-1})$ в $H^N(S^{n-1}) \subset C^k(S^{n-1})$ для любого k при достаточно большом $N = N(k)$ (это следует из результатов [1], гл.3). Поэтому любая собственная функция этого оператора, соответствующая ненулевому собственному числу, обладает нужной гладкостью. Пусть P — ортопроектор $L_2(\Omega)$ на собственное подпространство, отвечающее ненулевому собственному числу. Ясно, что $P \in S_\Omega(\lambda)$. Если $PH \neq \{0\}$, то в H есть достаточно гладкая функция, в противном случае она имеется в $H^\perp$.

Пусть, для определенности, $v \in H \cap C^k(S^{n-1}), v \not\equiv 0$. Покажем, что

$$\mathrm{mes}_{S^{n-1}}\{\omega \in S^{n-1} | (E(\overline{\lambda})v)(\omega) = 0\} = 0. \tag{1}$$

Для этого нам понадобится следующая лемма (ее доказательство можно найти в [2]).

Лемма 3.3. *Пусть U — открытое связное подмножество R^n, V — открытый конус в R^n с вершиной в начале координат, функция f голоморфна в $U + iV$ и непрерывна в замыкании $\mathrm{cl}(U + iV)$. Предположим, что существует измеримое множество $Z \subset U, \mathrm{mes}_n Z \neq 0$, такое, что $f|Z = 0$. Тогда $f \equiv 0$ в $U + iV$.*

Теперь предположим, что функция $E(\overline{\lambda})v$ обращается в нуль в S^{n-1} на множестве ненулевой меры. Распространим ее на $R^n \setminus 0$ как однородную степени $i\overline{\lambda} + n/2$ и продолжим голоморфно в область $R^n + i(\mathrm{int} K^*)$. Ясно, что множество ее нулей в R^n имеет ненулевую меру. Теперь, используя замечание 3.2 и лемму 3.3, заключаем, что $E(\overline{\lambda})v \equiv 0$, что невозможно, так как $v \not\equiv 0$. Равенство (1) установлено. Из него следует, что множество $\{\Phi E(\overline{\lambda})v | \Phi \in C^\infty(S^{n-1})\}$ плотно в $L_2(S^{n-1})$ и, следовательно, множество $R = \{E(\overline{\lambda})^{-1}\Phi E(\overline{\lambda})v | \Phi \in C^\infty(S^{n-1})\}$ плотно в $H^\beta(S^{n-1})$, а значит, и в $L_2(S^{n-1})$ (не умаляя общности, можно считать, что $\beta > 0$). В то же время $P_\Omega R \subset H$. Значит, $H = L_2(\Omega)$.

Если $v \in H^\perp \cap C^k(S^{n-1}), v \not\equiv 0$, то те же рассуждения показывают, что $H^\perp = L_2(\Omega)$, откуда следует, что $H = \{0\}$. Неприводимость $S_\Omega(\lambda)$ установлена.

Заметим теперь, что из результатов [1], гл.3 следует компактность оператора $P_\Omega E^{-1}(\lambda)\Phi E(\lambda) - P_\Omega E^{-1}(\overline{\lambda})\Phi E(\overline{\lambda}) \in S_\Omega(\lambda)$. Значит ([7], 4.1.10), $KL_2(\Omega) \subset S_\Omega(\lambda)$. •

Теорема 3.1 показывает, что отображения $\pi(\lambda) : \mathcal{U}(\cdot) \to \mathcal{U}(\lambda) : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ порождают неприводимые представления алгебры $S_\Omega(R_\beta)$ для $\forall \lambda \in R_\beta$.

Теорема 3.4. *Если $\lambda, \mu \in R_\beta, \lambda \neq \mu$, то представления $\pi(\lambda)$ и $\pi(\mu)$ неэквивалентны.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть существует унитарный оператор $U : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ такой, что $U^* P_\Omega E^{-1}(\lambda)\Phi E(\lambda) U = P_\Omega E^{-1}(\mu)\Phi E(\mu)$ для любой функции $\Phi \in C^\infty(S^{n-1})$. Тогда

$$U^* E^{-1}(\lambda)\Phi_0 E(\lambda) U = E^{-1}(\mu)\Phi_0 E(\mu) \tag{2}$$

для всякой функции Φ_0, однородной нулевой степени на $R^n \setminus 0$, голоморфно продолжаемой в область $R^n + i(\mathrm{int} K^*)$ и ограниченной там. (Такие функции существуют — см. доказательство теоремы 3.1).

Заменим в определении функции u_0 из первой части доказательства теоремы 3.1 λ на μ. Получившаяся функция удовлетворяет оценке $|u_0(z)| \leqslant \mathrm{const} \cdot |z|^{n/2-\beta}$. Используя аналог теоремы Пэли–Винера для $E(\lambda)$, заключаем, что $u_0|S^{n-1} \in E(\mu)(L_2(\Omega)) \cap C^\infty(S^{n-1})$. Положим теперь

$$h = (E(\lambda) U E^{-1}(\mu) u_0)/u_0.$$

Из (2) следует, что

$$E(\lambda)UE^{-1}(\mu)(\Phi_0 u_0) = (\Phi_0 u_0)h.$$

Отсюда выводим, что $U = E(\lambda)^{-1}hE(\mu)$. Точно так же, исходя из равенства

$$(U^{-1})^* P_\Omega E^{-1}(\overline{\mu})\Phi E(\overline{\mu})U^{-1} = P_\Omega E^{-1}(\overline{\lambda})\Phi E(\overline{\lambda}),$$

получим, что $U^{-1} = E(\overline{\mu})h_1 E(\overline{\lambda})$, где

$$h_1 = (E(\overline{\mu})U^{-1}E(\overline{\lambda})u_1)/u_1,$$

а

$$u_1 \in E(\overline{\lambda})(L_2(\Omega)) \cap C^\infty(S^{n-1}).$$

Используя унитарность оператора U и полученные представления для U и U^{-1}, заключаем, что $h = \bar{h}_1$ почти всюду на S^{n-1}.

Функции h и h_1, рассматриваемые как однородные степени $i(\lambda - \mu)$ и $i(\overline{\mu} - \overline{\lambda})$ соответственно, голоморфно продолжаются в $R^n + i(\mathrm{int}K^*)$. Положим

$$f(z) = \begin{cases} h(z), & z \in R^n + i(\mathrm{int}K^*), \\ \bar{h}_1(\bar{z}), & z \in R^n - i(\mathrm{int}K^*). \end{cases}$$

По теореме Боголюбова об „острие клина“ ([9], § 27) функция f голоморфно продолжается в окрестность R^n, что возможно лишь при $\lambda = \mu$. Получили противоречие. •

Пусть $C_0(R_\beta)$ — алгебра непрерывных функций на R_β с нулевыми пределами на $\pm\infty$. Покажем, что имеет место включение $C_0(R_\beta) \otimes KL_2(\Omega) \subset S_\Omega(R_\beta)$.

Если $\beta \neq 0$, то оператор-функция $R_\beta \ni \lambda \to P_\Omega E^{-1}(\lambda)\overline{\Phi}E(\lambda) - (P_\Omega E^{-1}(\lambda)\Phi E(\lambda))^* = P_\Omega(E(\lambda)^{-1}\overline{\Phi}E(\lambda) - E(\overline{\lambda})^{-1}\overline{\Phi}E(\overline{\lambda}))$ отлична от нуля и принадлежит пересечению $C_0(R_\beta) \otimes KL_2(\Omega) \cap S_\Omega(R_\beta)$ (это следует из результатов [1], гл.3).

Если $\beta = 0$, то тем же свойством обладает оператор-функция $R = R_0 \ni \lambda \to P_\Omega E^{-1}(\lambda)\Phi_1 E(\lambda) P_\Omega E^{-1}(\lambda)\Phi_2 E(\lambda)$, где $\Phi_1 \in C_0^\infty(\Omega^*)$, $\Phi_2 \in C_0^\infty(-\Omega^*)$. (С помощью рассуждений, аналогичных доказательству леммы 5.4.8, [1], можно показать, что $\|P_\Omega E^{-1}(\lambda)\Phi_1 E(\lambda); BL_2(\Omega)\| \to 0$, если $\lambda \to -\infty$ и $\|P_\Omega E^{-1}(\lambda)\Phi_2 E(\lambda); BL_2(\Omega)\| \to 0$, если $\lambda \to +\infty$).

Из сказанного и теорем 3.1, 3.4 следует, что алгебра $C_0(R_\beta) \otimes KL_2(\Omega) \cap S_\Omega(R_\beta)$ непуста и является массивной подалгеброй алгебры $C_0(R_\beta) \otimes KL_2(\Omega)$ и, стало быть ([7], 11.1.4), совпадает с ней. Включение $C_0(R_\beta) \otimes KL_2(\Omega) \subset S_\Omega(R_\beta)$ установлено.

Введем алгебру $S(\Omega, R_\beta)$, порожденную оператор-функциями $R_\beta \ni \lambda \to P_\Omega E^{-1}(\lambda)$ $\Phi E(\lambda) P_\Omega : L_2(S^{n-1}) \to L_2(S^{n-1})$ и алгеброй $C_0(R_\beta) \otimes KL_2(S^{n-1})$. Легко видеть, что алгебры $S_\Omega(R_\beta)/C_0(R) \otimes KL_2(\Omega)$ и $S(\Omega, R_\beta)/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1})$ изоморфны. Более того, в силу принадлежности оператор-функции $R_\beta \ni \lambda \to E(\lambda)^{-1}\Phi E(\lambda) - E(\lambda - \mathrm{Im}\lambda)^{-1}\Phi E(\lambda - \mathrm{Im}\lambda)$ алгебре $C_0(R_\beta) \otimes KL_2(S^{n-1})$([1], гл.3) имеют место изоморфизмы $S_\Omega(R_\beta)/C_0(R_\beta) \otimes KL_2(\Omega) \approx S_\Omega(R_0)/C_0(R_0) \otimes KL_2(\Omega) \approx S(\Omega, R_0)/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1}) \approx S(\Omega, R_\beta)/C_0(R_\beta) \otimes KL_2(S^{n-1})$.

Всюду далее вместо R_0 пишем просто R. В оставшейся части этого параграфа мы переносим схему локализации, предложенную Дыниным [6] для алгебр операторов Винера–Хопфа, на случай алгебр операторов на сфере.

Обозначим через $CB(R, BL_2(S^{n-1}))$ алгебру непрерывных оператор-функций $R \ni \lambda \to A(\lambda) \in BL_2(S^{n-1})$ с нормой $\|A(\cdot)\| = \sup\{\|A(\lambda); BL_2(S^{n-1})\|; \lambda \in R\}$. Введем оператор $[\varphi] \in BL_2(S^{n-1})$ — умножение на функцию $\varphi \in C^\infty(S^{n-1})$. Из ([1],5.4.4) следует, что

$$\inf\{\|[\varphi] + P(\cdot); CB(R; BL_2(S^{n-1}))\|; P(\cdot) \in C_0(R)\otimes$$
$$\otimes KL_2(S^{n-1})\} = \sup\{|\varphi(\omega)|; \omega \in S^{n-1}\}.$$

Отсюда вытекает, что алгебра $C(S^{n-1})$ изометрично вкладывается в $CB(R; BL_2(S^{n-1}))/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1})$. Сохраним обозначение $C(S^{n-1})$ для образа $C(S^{n-1})$ при этом вложении.

Пусть $\mathcal{A}$ — замкнутая подалгебра $(C(S^{n-1}))'$ — коммутанта $C(S^{n-1})$ в $CB(R, BL_2(S^{n-1}))/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1})$, содержащая $C(S^{n-1}), I^\omega = \{\varphi \in C(S^{n-1}) | \varphi(\omega) = 0\}$, $\mathcal{A}(\omega) = \mathrm{cl}(I^\omega \mathcal{A})$ — замкнутый двусторонний идеал в $\mathcal{A}$, порожденный I^ω. Назовем фактор-алгебру $\mathcal{A}_\omega = \mathcal{A}/\mathcal{A}(\omega)$ локализацией алгебры $\mathcal{A}$ в точке $\omega \in S^{n-1}$. Если $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, то через $\mathcal{B}_\omega$ обозначим образ $\mathcal{B}$ при каноническом отображении $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_\omega$.

Следующая лемма вытекает из результатов [1], гл.3.

Лемма 3.5. *Пусть* $\mathcal{U}(\lambda) = E^{-1}(\lambda)\Phi E(\lambda), \sigma \in C^\infty(S^{n-1})$. *Тогда коммутатор* $[\mathcal{U}(\cdot), \sigma]$ *принадлежит* $C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1})$.

Из леммы следует, что $S(\Omega, R)/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1}) \subset (C(S^{n-1}))'$. Пусть теперь $\mathcal{A}$ — алгебра, порожденная $C(S^{n-1})$ и $S(\Omega, R)/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1})$ в $CB(R, BL_2(S^{n-1}))/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1})$. Обозначим через $(\mathcal{R})^\wedge$ спектр алгебры $\mathcal{R}$.

Предложение 3.6. $(\mathcal{A})^\wedge = \bigcup\limits_{\omega \in S^{n-1}} (\mathcal{A}_\omega)^\wedge$.

Доказательство. Включение $(\mathcal{A}_\omega)^\wedge \subset (\mathcal{A})^\wedge$ следует из равенства $(\mathcal{A})^\wedge = (\mathcal{A}/\mathcal{A}(\omega))^\wedge \cup (\mathcal{A}(\omega))^\wedge = (\mathcal{A}_\omega)^\wedge \cup (\mathcal{A}(\omega))^\wedge$. Установим включение $\bigcup\limits_\omega (\mathcal{A}_\omega)^\wedge \supset (\mathcal{A})^\wedge$. Пусть π — неприводимое представление $\mathcal{A}$. Тогда $\pi(C(S^{n-1}))$ коммутирует с $\pi(\mathcal{A})$ и, стало быть, $\pi(C(S^{n-1})) = \mathbf{C}$. Пусть $\pi(1) = 1$, тогда $\pi | C(S^{n-1})$ есть отображение $\varphi \to \varphi(\omega)$ для некоторого $\omega \in S^{n-1}$. Следовательно, $I^\omega \subset \mathrm{Ker}\pi$ и, значит, $\mathcal{A}(\omega) \subset \mathrm{Ker}\pi$. Отсюда выводим, что $\pi \in (\mathcal{A}(\omega))^\wedge = (\mathcal{A}_\omega)$. •

Заметим теперь, что сужение любого неприводимого представления $\mathcal{A}$ на $S(\Omega, R)/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1})$ остается неприводимым представлением $S(\Omega, R)/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1})$ и что любое неприводимое представление $S(\Omega, R)/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1})$ может быть получено таким образом. Из равенства $(C(S^{n-1}))_\omega = \mathbf{C}$ следует, что $\mathcal{A}_\omega = (S(\Omega, R)/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1}))_\omega$. Отсюда вытекает, что

$$(S(\Omega, R)/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1}))^\wedge =$$
$$= \bigcup_{\omega \in S^{n-1}} ((S(\Omega, R)/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1}))_\omega)^\wedge.$$

Вспоминая, что $S(\Omega, R)/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1}) \approx S_\Omega(R_\beta)/C_0(R_\beta) \otimes KL_2(\Omega)$, получаем следующее предложение.

Предложение 3.7.

$$(S_\Omega(R_\beta))^\wedge = (C_0(R_\beta) \otimes KL_2(\Omega))^\wedge \cup \bigcup_{\omega \in S^{n-1}} ((S(\Omega, R)/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1}))_\omega)^\wedge.$$

Пусть $\omega \in \overline{\Omega} < S^{n-1} \subset R^n$. K_ω — конус, касательный к конусу K в точке ω (в смысле определения, данного в § 1), $\Omega_\omega = K_\omega \cap S^{n-1}$. Ясно, что если $\omega \in \mathrm{int}\Omega$, то $\Omega_\omega = S^{n-1}$.

Предложение 3.8. *Если* $\omega \in \overline{\Omega}$, *то*

$$(S(\Omega, R)/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1}))_\omega \approx (S(\Omega_\omega, R)/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1}))_\omega.$$

Доказательство. Пусть q — диффеоморфизм сферы S^{n-1} такой, что $q(\omega) = \omega$, $q(U \cap \Omega) = V \cap \Omega_\omega$ для некоторых открытых окрестностей U,V точки $\omega \in S^{n-1} q'(\omega) = I$ (q распространено на R^n равенством $q(t\omega) = tq(\omega)$). Можно, например, положить $q(\cdot) = (g'(\omega))^{-1} g(\cdot)$, где q — диффеоморфизм из определения допустимого конуса (см.§ 1). Определим отображение J: $L_2(S^{n-1}) \to L_2(S^{n-1})$ равенством $J(u)(\varphi) = u(q(\varphi))|\det(q'(\varphi))|^{1/2}$. Ясно, что J — унитарный оператор в $L_2(S^{n-1})$. Пусть $(\mathrm{ad}J)B(\cdot) = J^{-1}B(\cdot)J$ для $B(\cdot) \subset CB(R, BL_2(S^{n-1}))$. Легко видеть, что $(\mathrm{ad}J)(C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1})) = C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1})$ и $(\mathrm{ad}J)(I^\omega) = I^\omega$ (так как ω — неподвижная точка q). Следовательно, $\mathrm{ad}J$ индуцирует автоморфизм $((C(S^{n-1}))')_\omega \to ((C(S^{n-1}))')_\omega$.

Обозначим через $[A(\cdot)]$ класс вычетов в фактор-алгебре

$$CB(R, BL_2(S^{n-1}))/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1}),$$

содержащий $A(\cdot)$. Проверим, что $(\mathrm{ad}J)([P_{\Omega_\omega}]_\omega) = [P_\Omega]_\omega$ и $(\mathrm{ad}J)([E(\cdot)^{-1}\Phi E(\cdot)]_\omega) = [E(\cdot)^{-1}\Phi E(\cdot)]_\omega$. Отсюда и будет следовать нужный нам изоморфизм.

Установим первое равенство. Пусть $\varphi \in C^\infty(S^{n-1})$, $\varphi(\omega) = 1$, $\mathrm{supp}\varphi \subset U \cap V$, где U и V — из определения q. Тогда

$$(\mathrm{ad}J)([P_{\Omega_\omega}]_\omega) = (\mathrm{ad}J)([\varphi]_\omega [P_{\Omega_\omega}]_\omega) = (\mathrm{ad}J)([\varphi \times$$
$$\times P_{\Omega_\omega}]_\omega) = [(\varphi \circ q^{-1})P_\Omega]_\omega = [\varphi \circ q^{-1}]_\omega [P_\Omega]_\omega = [P_\Omega]_\omega.$$

Установим второе равенство. Пусть $\varphi_k \in C^\infty(S^{n-1})$, $|\varphi_k| \leqslant 1$, $\varphi_k(\omega) = 1$, $\mathrm{supp}\varphi_k \to \{\omega\}$. Введем оператор-функции

$$B_k(\cdot) = \varphi_k E^{-1}(\cdot)\Phi E(\cdot)\varphi_k - \varphi_k J^{-1} E^{-1}(\cdot)\Phi E(\cdot) J \varphi_k.$$

Ясно, что $[B_k(\cdot)]_\omega = [E(\cdot)^{-1}\Phi E(\cdot)]_\omega - (\mathrm{ad}J)((E^{-1}(\cdot)\Phi E(\cdot))_\omega)$. Покажем, что

$$\|B_k(\cdot); CB(R, BL_2(S^{n-1}))\| \to 0.$$

Отсюда будет следовать нужное равенство. Применяя теорему о замене переменной в мероморфном псевдодифференциальном операторе [1], получаем:

$$(B_k(\lambda)u)(\theta) = \varphi_k(\theta) E^{-1}_{\omega \to \theta}(\lambda)\Phi(\omega) E_{\zeta \to \omega}(\lambda)(\varphi_k(\zeta)u(\zeta)) -$$
$$-\varphi_k(\theta) E^{-1}_{\omega \to \theta}(\lambda)\Phi((q'(\theta)^*)^{-1}\omega) E_{\zeta \to \omega}(\lambda)(\varphi_k(q(\zeta))u(q(\zeta))) + \varphi_k(\theta) K_{\zeta \to \theta}(\lambda)(\varphi_k(q(\zeta))u(\zeta)),$$

где $K(\cdot) \in C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1})$. Осталось сослаться на слабую сходимость к нулю операторов умножения на φ_k и равенства $(q'(\omega)^*)^{-1} = I$ и $q(\omega) = \omega$. •

Предложение 3.9. *Если* $\omega \in \overline{\Omega}$, *то*

$$S_{\Omega_\omega}(R) \approx (S(\Omega_\omega, R)/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1}))_\omega.$$

Доказательство. Пусть π — композиция естественного отображения $\gamma : S_{\Omega_\omega}(R) \to S(\Omega_\omega, R)$, $\gamma(U(\cdot)) = U(\cdot)P_{\Omega_\omega}$, проекции $S(\Omega_\omega, R) \to S(\Omega_\omega, R)/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1})$ и отображения локализации $S(\Omega_\omega, R)/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1}) \to (S(\Omega_\omega, R)/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1}))_\omega$. Легко видеть, что π — эпиморфизм. Покажем, что $\mathrm{Ker}\pi = 0$. Отсюда и будет следовать нужный нам изоморфизм.

Пусть $B(\cdot) \in S_{\Omega_\omega}(R)$ и $[\gamma(B(\cdot))]_\omega = 0$ ($[\cdot]$ означает класс вычетов по модулю $C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1})$). Тогда $[B(\cdot)P_{\Omega_\omega}]_\omega = 0$ и, следовательно, $[B(\cdot)P_{\Omega_\omega}] \in \mathcal{A}(\omega)$. Значит, $B(\cdot)P_{\Omega_\omega} + K(\cdot) = \varphi A(\cdot) + \delta(\cdot)$, где $\|\delta(\cdot)\| < \varepsilon/2$, $K(\cdot) \in C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1})$, $\varphi \in C^\infty(S^{n-1})$, $\varphi(\omega) = 0$. Выберем функцию $\psi \in C^\infty(S^{n-1})$ такую, что $|\psi| \leqslant 1$, $\psi = 1$ в окрестности $\omega, \psi = 0$ вне малой окрестности ω. Тогда $\|\psi B(\cdot)P_{\Omega_\omega} + \psi K(\cdot)\| = \|\psi\varphi A(\cdot) + \psi\delta(\cdot)\| < \varepsilon$. Вспоминая, что $[\psi, B(\cdot)] \in C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1})$, получаем неравенство $\|B(\cdot)P_{\Omega_\omega}\psi + K_1(\cdot)\| < \varepsilon$, где $K_1(\cdot) \in C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1})$ (можно считать, что носитель оператор-функции $K_1(\cdot)$ — компактное подмножество R).

Пусть $s \in R, T_s$ — оператор сдвига на вектор $s\omega$ ($T_s : L_2(R^n) \to L_2(R^n), (T_s u)(x) = u(x - s\omega)$). Ясно, что T_s — унитарный оператор в $L_2(R^n)$. Используя представление (2.1), получаем, что

$$\|B(\cdot)P_{\Omega_\omega}\psi + K(\cdot); CB(R, BL_2(S^{n-1}))\| = \|T_s^{-1}M^{-1}B(\cdot)\psi P_{\Omega_\omega} \times \\ \times MT_s + T_s^{-1}M^{-1}K_1(\cdot)MT_s; BL_2(R^n)\| < \varepsilon.$$

Здесь M и M^{-1} — прямое и обратное преобразования Меллина (опущены обозначения переменных ρ, r и $\lambda + \mathrm{in}/2$). Фиксируем $u \in C_0^\infty(R^n \setminus 0)$. При достаточно большом s имеет место включение $\mathrm{supp} T_s u \subset \{x \in R^n | \psi(x/|x|) = 1\}$ и, стало быть, $\psi T_s u = T_s u$ (функция ψ считается продолженной на $R^n \setminus 0$ по однородности степени 0). Оператор T_s коммутирует с операторами Π_{K_ω} и $F^{-1}_{\xi \to x}\Phi(\xi)F_{y \to \xi}$, значит, $T_s^{-1}M^{-1}B(\cdot)P_{\Omega_\omega}MT_s = M^{-1}B(\cdot)P_{\Omega_\omega}M$.

Таким образом, приходим к неравенству

$$\|M^{-1}B(\cdot)P_{\Omega_\omega}Mu + T_s^{-1}M^{-1}K_1(\cdot)MT_s u; L_2(R^n)\| \leqslant \varepsilon\|u; L_2(R^n)\|$$

для достаточно больших s. Пусть $s_k \in R, s_k \to +\infty$. Заметим, что последовательность $w_k(\cdot) = M_{r \to \lambda_0 + \mathrm{in}/2} \times ((T_{s_k}u)(r, \cdot))$ слабо сходится к нулю в $L_2(S^{n-1})$ при любом фиксированном $\lambda_0 \in R$. Отсюда вытекает, что

$$\|T_s^{-1}M^{-1}K_1(\cdot)MT_s u; L_2(R^n)\| = \\ = (\int_{-\infty}^{+\infty} \|K_1(\lambda)M_{r \to \lambda + \mathrm{in}/2}(T_s u)(r, \cdot); L_2(S^{n-1})\|^2 d\lambda)^{1/2} \to 0$$

при $s \to +\infty$. Следовательно, $\|M^{-1}B(\cdot)P_{\Omega_\omega}Mu\| \leqslant \varepsilon\|u\|$ для любого $\varepsilon > 0$. Значит, $B(\cdot) \equiv 0$. •

Пусть $\omega \in \mathrm{int}\Omega$, тогда $\Omega_\omega = S^{n-1}$ и $S_{\Omega_\omega}(R) \approx C(S^{n-1})$. Если $\omega \in S^{n-1} \setminus \overline{\Omega}$, то легко видеть, что $(S(\Omega, R)/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1}))_\omega = 0$ и $((S(\Omega, R)/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1}))_\omega)^\wedge = \varnothing$. Из этих замечаний и предложений 3.7–3.9 выводим основной результат настоящего параграфа:

Теорема 3.10.

$$(S_\Omega(R_\beta))^\wedge = (C_0(R_\beta) \otimes KL_2(\Omega))^\wedge \cup (C(S^{n-1}))^\wedge \cup \\ \cup \bigcup_{\omega \in \partial\Omega} (S_{\Omega_\omega}(R))^\wedge.$$

§ 4. Алгебры трансверсальных операторов

Утверждения этого раздела, приведенные без доказательств, получены с помощью методов работ [10, 11]. Изменения в рассуждениях незначительны.

Пусть $\mathcal{K} = K \times R^{m-n}$, где K — допустимый конус в R^n. Положим $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in R^m, x^{(1)} \in R^n, x^{(2)} \in R^{m-n}$. Обозначим через $L_2(R^m, |x^{(1)}|^\beta)$ пространство с нормой $\|u\| = (\int_{R^m} |u(x)|^2 |x^{(1)}|^{2\beta} dx)^{1/2}$. Если Φ — функция из $C^\infty(R^m \backslash 0)$ однородная нулевой степени, то оператор $F^{-1}_{\xi\to x}\Phi(\xi)F_{y\to\xi}$ непрерывен в $L_2(R^m, |x^{(1)}|^\beta)$ при $|\beta| < n/2$ [1].

Рассмотрим алгебру, порожденную операторами $\Pi_{\mathcal{K}} F^{-1}_{\xi\to x}\Phi(\xi)F_{y\to\xi}$ в пространстве $L_2(\mathcal{K}, |x^{(1)}|^\beta) = \Pi_{\mathcal{K}} L_2(R^m, |x^{(1)}|^\beta)$ при $|\beta| < n/2$. Она изоморфна алгебре $\mathcal{L}_K^\beta$ оператор-функций $S^{m-n-1} \ni \theta \to A(\theta) = \Pi_K F^{-1}_{\eta\to z}\Phi(\eta,\theta)F_{y\to\eta} : L_2(K, |x|^\beta) \to L_2(K, |x|^\beta)$. Операции в алгебре $\mathcal{L}_K^\beta$ поточечные, а норма равномерная

$$\|A(\cdot); \mathcal{L}_K^\beta\| = \sup\{\|A(\theta); BL_2(K, |x|^\beta)\|; \theta \in S^{m-n-1}\}.$$

Фиксируем $\theta \in S^{m-n-1}$ и рассмотрим алгебру $\mathcal{L}_K^\beta(\theta)$, порожденную в $L_2(K, |x|^\beta)$ операторами $A(\theta)$.

Предложение 4.1. *Алгебра $\mathcal{L}_K^\beta(\theta)$ неприводима.*

Зададим отображение $\pi : \mathcal{L}_K^\beta(\theta) \to S_\Omega(R_\beta)$ на образующих алгебры $\mathcal{L}_K^\beta(\theta)$ равенством

$$\pi(\Pi_K F^{-1}_{\eta\to z}\Phi(\eta,\theta)F_{y\to\eta}) = \mathcal{U}_\Phi(\cdot),$$

где $\mathcal{U}_\Phi(\cdot)$ — оператор-функция $R_\beta \ni \lambda \to P_\Omega E^{-1}_{\omega\to\varphi}(\lambda)\Phi(\omega, 0)\ E_{\psi\to\omega}(\lambda) : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega); \varphi, \psi, \omega \in S^{n-1}$.

Предложение 4.2. *Отображение π распространяется до эпиморфизма $\mathcal{L}_K^\beta(\theta) \to S_\Omega(R_\beta)$. Ядро* Ker$\pi$ *совпадает с замкнутым двусторонним идеалом $J_K^\beta(\theta)$ алгебры $\mathcal{L}_K^\beta(\theta)$, порожденным операторами $\Pi_K F^{-1}_{\eta\to z}\Phi(\eta,\theta)F_{y\to\eta}$ такими, что $\Phi(\eta, 0) \equiv 0$. Имеет место изоморфизм $\mathcal{L}_K^\beta(\theta)/J_K^\beta(\theta) \approx S_\Omega(R_\beta)$.*

Обозначим через $KL_2(K, |x|^\beta)$ идеал компактных операторов в $L_2(K, |x|^\beta)$.

Предложение 4.3. *Имеет место включение $KL_2(K, |x|^\beta) \subset J_K^\beta(\theta)$. Если $\sigma \in C^\infty(R^n \backslash 0)$, функция σ однородна степени 0, $A(\theta) \in J_K^\beta(\theta)$, то $[A(\theta), \sigma] \in KL_2(K, |x|^\beta)$.*

Предложение 4.4. *Фактор-алгебры $J_K^\beta(\theta)/KL_2(K, |x|^\beta)$ и $J_K^0(\theta)/KL_2(K)$ изоморфны.*

Пусть J_K^β — замкнутый двусторонний идеал в алгебре $\mathcal{L}_K^\beta$, порожденный оператор-функциями $S^{m-n-1} \ni \theta \to A(\theta) \in J_K^\beta(\theta)$. Для спектра $(J_K^\beta)^\wedge$ справедливо равенство:

$$(J_K^\beta)^\wedge = \bigcup_{\theta \in S^{m-n-1}} (J_K^\beta(\theta))^\wedge. \tag{4.1}$$

Алгебры $S_\Omega(R_\beta)$ и $\mathcal{L}_K^\beta/J_k^\beta$ изоморфны. Стало быть,

$$(\mathcal{L}_K^\beta)^\wedge = (S_\Omega(R_\beta))^\wedge \cup \bigcup_{\theta \in S^{m-n-1}} (J_K^\beta(\theta))^\wedge.$$

Из предложения 4.4 выводим, что

$$(J_K^\beta(\theta))^\wedge = (J_K^0(\theta)/KL_2(K))^\wedge \cup i_\beta(\theta), \tag{4.2}$$

где $i_\beta(\theta)$ — тождественное представление алгебры $J_K^\beta(\theta)$.

Предложение 4.3 позволяет применить процесс локализации [6] для описания спектра $(J_k^0(\theta)/KL_2(K))^\wedge$. В результате получаем равенство

$$(J_K^0(\theta)/KL_2(K))^\wedge = \bigcup_{\omega\in\overline{\Omega}} (J_{K_\omega}^0(\theta))^\wedge.$$

Здесь $\Omega = K \cap S^{n-1}$, K_ω — конус, касательный к K в точке $\omega \in \Omega \subset K$. Если $\omega \in \mathrm{int}\Omega$, то $K_\omega = R^n$ и $J_{K_\omega}^0(\theta) \approx C_0(R^n)$. Таким образом, приходим к следующему предложению.

Предложение 4.5. $(J_K^0(\theta)/KL_2(K))^\wedge = (C_0(R^n))^\wedge \cup \bigcup_{\omega\in\partial\Omega} (J_{K_\omega}^0(\theta))^\wedge.$

Рассмотрим алгебру $J_{K_\omega}^0(\theta)$ в случае, когда ω — гладкая точка границы $\partial\Omega$. Тогда конус K_ω — полупространство. Так как преобразование Фурье коммутирует с поворотами, то алгебра $J_{K_\omega}^0(\theta)$ изоморфна алгебре $J_{R_+^n}^0(\theta)$, порожденной в $L_2(R_+^n)$ операторами вида $\sum\limits_i \prod\limits_{j_0} \Pi_{R_+^n} F_{\eta\to z}^{-1} \Phi_{ij}(\eta,\theta) F_{y\to\eta}$. Здесь $R_+^n = \{x = (x', x_n) \in R^n | x_n \geqslant 0\}, y, \eta, z \in R^n$, для любого i существует j такое, что $\Phi_{ij}(\eta, 0) \equiv 0$.

Пусть Π_{R_+} — оператор (в $L_2(R)$) умножения на характеристическую функцию полуоси R_+,$\Pi^- = F\Pi_{R_+}F^{-1}$ (F — одномерное преобразование Фурье). Оператор Π^- — проектор; $\Pi^- : L_2(R) \to \mathcal{H}^-(R) = F(L_2(R_+))$. Имеем равенство

$$\Pi_{R_+^n} F_{\eta\to z}^{-1} \Phi(\eta,\theta) F_{y\to\eta} = F_{\eta\to z}^{-1} \Pi_{t\to\eta_n}^- \Phi(\eta', t, \theta) F_{y\to(\eta',t)}.$$

Из унитарности преобразования Фурье следует, что

$$\|\sum_i \prod_j \Pi_{R_+^n} F_{\eta\to z}^{-1} \Phi_{ij}(\eta,\theta) F_{y\to\eta}; BL_2(R_+^n)\| =$$
$$= \sup\{\|\sum_i \prod_j \Pi^- \Phi_{ij}(\eta', \cdot, \theta); B\mathcal{H}^-(R)\|; \eta' \in R^{n-1}\}.$$

Лемма 4.6. *Если* $\Phi(\eta, 0) \equiv 0$, *то* $\|\Pi^-\Phi(\eta', \cdot, \theta);\ B\mathcal{H}^-(\mathbb{R})\| \to 0$; *при* $|\eta'| \to \infty$.

Действительно, $\|\Pi^-\Phi(\eta', \cdot, \theta); B\mathcal{H}^-(R)\| \leqslant \sup\{|\Phi(\eta', t, \theta)|; t \in R\}$. В то же время $|\Phi(\eta', t, \theta)| = |\Phi(\eta'/|\eta'|, t/|\eta'|, \theta/|\eta'|) - \Phi(\eta'/|\eta'|, t/|\eta'|, 0)| \leqslant \mathrm{const} \cdot |\eta'|^{-1}$.

Фиксируем $\eta' \in R^{n-1}$ и рассмотрим алгебру $\mathcal{T}(\eta')$, порожденную в $\mathcal{H}^-(R)$ операторами $\sum\limits_i \prod\limits_j \Pi^- \Phi_{ij}(\eta', \cdot, \theta)$.

Сделаем небольшое отступление в теорию тёплицевых операторов [12]. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра тёплицевых операторов в $\mathcal{H}^-(R)$, порожденная операторами вида $f \to \Pi^-(\Phi f)$, где Φ – непрерывная на R функция с конечными пределами на $\pm\infty$. Алгебра $\mathcal{A}$ неприводима и содержит идеал $K\mathcal{H}^-(R)$ компактных операторов. Фактор-алгебра $\mathcal{A}/K\mathcal{H}^-(R)$ изоморфна алгебре $C(\Gamma)$, где Γ — граница нижнего полукруга в R^2 радиуса 1 и с центром в точке (0,1). Изоморфизм осуществляется следующим образом: классу вычетов, содержащему оператор $f \to \Pi^-(\Phi f)$, ставится в соответствие функция $\sigma_\Phi(\cdot)$ на Γ, определенная равенствами $\sigma_\Phi(\gamma) = \Phi(-\infty)(1+t)/2 + \Phi(+\infty)(1-t)/2$, если $\gamma = (t, 1)$ — точка диаметра и $\sigma_\Phi(\gamma) = \Phi(p(\gamma))$, если γ принадлежит полуокружности. Здесь p — гомеоморфизм полуокружности с выколотыми концами на прямую R (проекция из центра окружности). Рассмотрим подалгебру $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$, порожденную операторами $\Pi^-\Phi(\cdot)$, где $\Phi(-\infty) = \Phi(+\infty) = 0$. Имеют место включение $K\mathcal{H}^-(R) \subset \mathcal{A}_0$ и изоморфизм $\mathcal{A}_0/K\mathcal{H}^-(R) \approx C_0(R)$. Оказывается, что $\mathcal{A}_0$ на самом деле — идеал в $\mathcal{A}$. Действительно, пусть $\Pi^- f(\cdot) \in \mathcal{A}, \Pi^- g_0(\cdot) \in \mathcal{A}_0$. Тогда $\Pi^- f(\cdot)\Pi^- g_0(\cdot) = \Pi^- f(\cdot) g_0(\cdot) + K$, где $K \in K\mathcal{H}^-(R)$. Осталось вспомнить, что $K\mathcal{H}^-(R) \subset \mathcal{A}_0$, и заметить, что $f(x)g_0(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$ и, стало быть, $\Pi^- f(\cdot)g_0(\cdot) \in \mathcal{A}_0$, т.е. $\Pi^- f(\cdot)\Pi^- g_0(\cdot) \in \mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_0$ — идеал. Для любого $t \in R$ отображение $\pi(t) : \Pi^- f(\cdot) \to f(t)$ продолжается до одномерного неприводимого представления алгебры $\mathcal{A}_0$. Для различных t_1, t_2 представления $\pi(t_1)$, $\pi(t_2)$ неэквивалентны. Всякое неприводимое представление $\mathcal{A}_0$ эквивалентно либо тождественному, либо $\pi(t)$ при некотором $t \in R$.

Заметим теперь, что в силу однородности функций $\Phi_{ij}, \Phi_{ij}(\eta', t, \theta) \to \{\Phi_{ij}(0, \pm 1, 0)$ при $t \to \pm\infty$ и для любого i существует j такое, что $\Phi_{ij}(\eta', t, \theta) \to 0$ при $t \to \pm\infty$. Отсюда заключаем, что $\mathcal{T}(\eta') \approx \mathcal{A}_0$. Из леммы 4.6 и предложения 11.5.3, [7] следует, что алгебра $FJ^0_{R^n_+}(\theta)F^{-1}$ совпадает с непрерывным полем $C_0(R^{n-1}, \mathcal{A}_0)$. Значит ([7], 10.4.3),

$$(J^0_{R^n_+}(\theta))^\wedge = \bigcup_{\eta' \in R^{n-1}} (\mathcal{T}(\eta'))^\wedge.$$

Таким образом, справедливо следующее предложение.

Предложение 4.7. *Пусть* $A = \sum_i \prod_j \Pi_{R^n_+} F^{-1}_{\eta \to z} \Phi_{ij}(\eta, \theta) F_{y \to \eta} \in J^0_{R^n_+}(\theta)$. *Тогда следующие отображения продолжаются до неприводимых, попарно неэквивалентных представлений* $J^0_{R^n_+}(\theta)$:

1) $\pi(\eta') : A \to \sum_i \prod_j \Pi^- \Phi_{ij}(\eta', \cdot, \theta) : \mathcal{H}^-(R) \to \mathcal{H}^-(R); \eta' \in R^{n-1}$.

2) $\rho(\eta) : A \to \sum_i \prod_j \Phi_{ij}(\eta, \theta); \eta \in R^n$.

Всякое неприводимое представление $J^0_{R^n_+}(\theta)$ *эквивалентно одному из перечисленных.*

Пусть теперь ω — особая точка границы $\partial\Omega$. Тогда конус K_ω представим в виде $K_1 \times L$, где L — s-мерное подпространство R^n, K_1 — допустимый конус в ортогональном дополнении $L^\perp$. Идеал $J^0_{K_\omega}$ алгебры $\mathcal{L}^0_{K_\omega}$ изоморфен алгебре операторов в $L_2(K_\omega \times R^{m-n})$, порожденной операторами вида

$$\sum_i \prod_j \Pi_{K_\omega \times R^{m-n}} F^{-1}_{\xi \to x} \Phi_{ij}(\xi) F_{y \to \xi}.$$

Здесь для любого i существует j такое, что $\Phi_{ij}(\eta, 0) \equiv 0$. Введем в R^m новые координаты, положив $x = \mathrm{diag}(\mathcal{D}, I_{m-n})\tilde{x}$, где $\mathcal{D}$ — матрица поворота в R^n, переводящего стандартный ортонормированный базис в базис, последние s векторов которого лежат в L. Алгебра $J^0_{R_\omega}$ оказывается унитарно эквивалентной алгебре, порожденной операторами

$$\sum_i \prod_j \Pi_{K_1 \times R^{m-n+s}} F^{-1}_{\xi \to x} \Phi_{ij}(\mathcal{D}(\xi^{(1)}), \xi^{(2)}) F_{y \to \xi} : L_2(K_1 \times R^{m-n+s}) \to$$
$$\to L_2(K_1 \times R^{m-n+s}),$$

где $\xi^{(1)} \in R^n, \xi^{(2)} \in R^{m-n}, \forall i \exists j : \Phi_{ij}(\xi^{(1)}, 0) \equiv 0$.

Последняя алгебра изоморфна алгебре $J^0_{K_1}$, порожденной оператор-функциями

$$S^{m-n+s-1} \ni (\theta_1, \theta_2) \to \sum_i \prod_j \Pi_{K_1} F^{-1}_{\eta \to z} \Phi_{ij}(\mathcal{D}(\eta, \theta_1), \theta_2) \times$$
$$\times F_{y \to \eta} : L_2(K_1) \to L_2(K_1).$$

Здесь η, z,$y \in R^{n-s}$,$\theta_1 \in R^s$,$\theta_2 \in R^{m-n}$,$|\theta_1| + |\theta_2| = 1$, $\forall i \exists j : \Phi_{ij}(\xi^{(1)}, 0) \equiv 0$.

Справедливо равенство

$$(J^0_{K_1})^\wedge = \bigcup_{(\theta_1,\theta_2)\in S^{m-n+s-1}} (J^0_{K_1}(\theta_1, \theta_2))^\wedge,$$

где $J^0_{K_1}(\theta_1, \theta_2)$ — алгебра, порожденная в $L_2(K_1)$ значениями оператор-функций из $J^0_{K_1}$ при фиксированных $(\theta_1, \theta_2) \in S^{m-n+s-1}$. Вспоминая, что

$$(J^0_{K_\omega})^\wedge = \bigcup_{\theta\in S^{m-n-1}} (J^0_{K_\omega}(\theta))^\wedge,$$

получаем равенство

$$\bigcup_{\theta\in S^{m-n-1}} (J^0_{K_\omega}(\theta))^\wedge = \bigcup_{(\theta_1,\theta_2)\in S^{m-n+s-1}} (J^0_{K_1}(\theta_1, \theta_2))^\wedge.$$

Алгебра $J^0_{K_1}(\theta_1, \theta_2)$ является идеалом алгебры $\mathcal{L}^0_{K_1}(\theta_1, \theta_2)$, порожденной операторами $\Pi_{K_1} F^{-1}_{\eta\to z} \Phi(\mathcal{D}(\eta, \theta_1), \theta_2) F_{y\to\eta} : L_2(K_1) \to L_2(K_1)$. Алгебра $\mathcal{L}^0_{K_1}(\theta_1, \theta_2)$ — полный аналог алгебры $\mathcal{L}^0_K(\theta)$ из предложения 4.1, идеал $J^0_{K_1}(\theta_1, \theta_2)$ соответствует идеалу $J^0_K(\theta) \subset \mathcal{L}^0_K(\theta)$. Таким образом, можно продолжить спуск по размерностям. Все допустимые конусы в R^2 гладкие, стало быть, формулы (4.1), (4.2), предложения 4.5, 4.7 и процесс спуска по размерностям позволяют выписать все неприводимые представления J^β_K.

§ 5. Списки представлений

Пусть по-прежнему K — допустимый конус в R^n,$\Omega = K \cap S^{n-1}$. Пусть ω — гладкая точка $\partial\Omega$, тогда Ω_ω — полусфера, и алгебра $S_{\Omega_\omega}(R)$ изоморфна алгебре $S_+(R)$ оператор-функций $R \ni \lambda \to P^+ E^{-1}_{\zeta\to\varphi}(\lambda) \Phi(\mathcal{D}(\zeta)) E_{\psi\to\zeta}(\lambda) : L_2(S^{n-1}_+) \to L_2(S^{n-1}_+)$, где P^+ — оператор умножения на характеристическую функцию полусферы S^{n-1}_+, $\mathcal{D}$ — поворот, переводящий R^n_+ в K_ω. Алгебра $S_+(R)$ изучалась в [1], где получен такой результат:

Пусть $\varkappa$ — отображение $S^{n-2} \times R \to S^{n-1}$;$\varkappa(\overset{0}{\omega}, t) = (\overset{0}{\omega}/\sqrt{1+t^2}, t/\sqrt{1+t^2})$, тогда следующие отображения продолжаются до неприводимых попарно неэквивалентных представлений $S_+(R)$:

1)$\pi(\overset{0}{\omega})$: $P^+ E^{-1}_{\zeta\to\varphi}(\cdot) \Phi(\mathcal{D}(\zeta)) E_{\psi\to\zeta}(\cdot) \to \Pi^-_{t\to s} \Phi(\mathcal{D}(\varkappa(\overset{0}{\omega}, t)))$: $\mathcal{H}^-(R) \to \mathcal{H}^-(R)$; $\overset{0}{\omega} \in S^{n-2}$.

2)$\rho(\varphi) : P^+ E^{-1}_{\zeta\to\varphi}(\cdot) \Phi(\mathcal{D}(\zeta)) E_{\psi\to\zeta}(\cdot) \to \Phi(\varphi); \varphi \in S^{n-1}$.

3)$\delta(t)$: $P^+ E^{-1}_{\zeta\to\varphi}(\cdot) \Phi(\mathcal{D}(\zeta)) E_{\psi\to\zeta}(\cdot) \to (1+t)\Phi(\mathcal{D}(N))/2 + (1-t)\Phi(\mathcal{D}(S))/2; t \in (-1, 1), S, N$ — южный и северный полюсы сферы S^{n-1}.

Всякое неприводимое представление $S_+(R)$ эквивалентно одному из перечисленных.

Пусть ω — особая точка $\partial\Omega$. Тогда $K_\omega = K_1 \times L$, где L — линейное пространство размерности s,K_1 - допустимый конус в $L^\perp$. Обозначим через $\mathcal{D}$ поворот, переводящий стандартный базис в R^n в базис, последние s векторов которого параллельны L. Алгебра $S_{\Omega_\omega}(R)$ изоморфна алгебре оператор-функций

$$S^{s-1} \ni \theta \to \Pi_{K_1} F^{-1}_{\eta\to z}\Phi(\mathcal{D}(\eta,\theta))F_{y\to\eta} : L_2(K_1) \to L_2(K_1),$$

где $z,\eta,y \in R^{n-s}$. Последняя алгебра — полный аналог алгебры $\mathcal{L}^0_K$ из § 4. Пусть $K_1 \cap S^{n-s-1} = \Omega_1$, алгебра $S_{\Omega_1}(R)$ порождается оператор-функциями $R \ni \lambda \to P_{\Omega_1} E^{-1}_{\nu\to\tau}(\lambda)\Phi(\mathcal{D}(\nu,0))E_{\rho\to\nu}(\lambda) : L_2(\Omega_1) \to L_2(\Omega_1)$, где $\nu,\tau,\rho \in S^{n-s+1}$, алгебра $J^0_{K_1}$ порождается оператор-функциями

$$S^{s-1} \ni \theta \to \sum_i \prod_j \Pi_{K_1} F^{-1}_{\eta\to z}\Phi_{ij}(\mathcal{D}(\eta,\theta))F_{y\to\eta} : L_2(K_1) \to L_2(K_1),$$

где $\eta, z, y \in R^{n-s}, \forall i \exists j : \Phi_{ij}(\mathcal{D}(\eta,0)) \equiv 0$.

Из результатов § 4 следует, что

$$(S_{\Omega_\omega}(R))^\wedge = (S_{\Omega_1}(R))^\wedge \cup (J^0_{K_1})^\wedge.$$

Алгебра $S_{\Omega_1}(R)$ — аналог $S_\Omega(R)$ в низшей размерности, спектр $(J^0_{K_1})^\wedge$ рассматривался в § 4. Таким образом, изучение спектра $(S_{\Omega_\omega}(R))^\wedge$ в случае особой точки $\omega \in \partial\Omega$ также сводится к спуску по размерностям. Теперь теорема 3.10 и результаты § 4 позволяют выписать все неприводимые представления алгебр мультипликаторов Фурье.

Пусть K — допустимый конус в R^n. Последовательность $\{K_i\}_{i=0}^r$ назовем исчерпывающей K-цепочкой, если выполнены следующие условия:

1) $K_0 = K$.

2) Для любого s, $0 \leqslant s \leqslant r-1$, K_s — допустимый конус размерности n_s.

3) K_r — полупространство размерности $n_{r-1} \geqslant 2$.

4) Для любого s, $0 \leqslant s \leqslant r-2$, существует точка $\omega \in \partial(K_s \cap S^{n_s-1})$ такая, что $(K_s)_\omega = K_{s+1} \times L_{n_s - n_{s+1}}$.

Здесь $(K_s)_\omega$ — конус, касательный к конусу K_s в точке ω, $L_{n_s-n_{s+1}}$ — линейное пространство размерности $n_s - n_{s+1} > 0$.

5) Существует точка $\omega \in \partial(K_{r-1} \cap S^{n_{r-1}-1})$ такая, что $(K_{r-1})_\omega = K_r$.

Для исчерпывающей K-цепочки $\{K_i\}_{i=0}^r$ определим последовательность поворотов $\{\mathcal{D}_i\}_{i=1}^r$ следующим образом:

1)$\mathcal{D}_i \in SO(n_{i-1})$;

2) если $1 \leqslant i \leqslant r-1$, то $\mathcal{D}_i$ — поворот в $R^{n_{i-1}}$, переводящий стандартный базис в базис, последние $n_{i-1} - n_i$ векторов которого параллельны $L_{n_{i-1}-n_i}$;

3)$\mathcal{D}_r$ — поворот в $R^{n_{r-1}}$, переводящий $R_+^{n_{r-1}}$ в K_r.

Теперь можно сформулировать полученные результаты.

Теорема 5.1. *Пусть K — допустимый конус в R^n, алгебра M^β_K порождается операторами $A = \Pi_K F^{-1}_{\xi\to x}\Phi(\xi)F_{y\to\xi}$ в пространстве $L_2(K, |x|^\beta), |\beta| < n/2$, $\Phi \in C^\infty(R^n \setminus 0)$, функция Φ однородна степени 0. Пусть еще $\{K_i\}_{i=0}^r$ — исчерпывающая K-цепочка, $\Omega_i = K_i \cap S^{n_i-1}$ для $0 \leqslant i < r$.*

Следующие отображения продолжаются до неприводимых представлений алгебры M^β_K:

1) $\pi(K_0,\dots,K_i;\theta_1,\dots,\theta_i) : A \to \Pi_{K_i} F^{-1}_{\eta\to x}\Phi(\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2\dots(\mathcal{D}_i(\eta,\theta_i),\theta_{i-1}),\dots),\theta_1)F_{y\to\eta} : L_2(K_i) \to L_2(K_i)$; здесь $x,y,\eta \in R^{n_i}; \theta_s \in R^{n_{s-1}-n_s}, \sum_{s=1}^{i} |\theta_s| = 1, 0 < i < r$.

Если $r = 1$, то отображение не определяется.

2) $\pi(K_0,\ldots,K_i;\lambda)$: $A \to P_{\Omega_i}E^{-1}_{\omega\to\varphi}(\lambda)\Phi(\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2\ldots(\mathcal{D}_i(\omega,0),0),\ldots),0)E_{\varphi\to\omega}(\lambda)$: $L_2(\Omega_i)\to L_2(\Omega_i)$; *здесь* $\varphi,\omega,\psi\in S^{n_i-1}, 0<i<r, \lambda\in R_0=R$.

Если $r=1$, *то отображение не определяется.*

3) $\pi(K_0,K_1,\ldots,K_r;\theta_1,\ldots,\theta_{r-1};\eta')$: $A\to \Pi^-\Phi(\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2\ldots(\mathcal{D}_r(\eta',\cdot),\theta_{r-1}),\ldots),\theta_1)$: $\mathcal{H}^-(R)\to\mathcal{H}^-(R)$.

Здесь $\eta'\in R^{n_{r-1}-1}$; $\theta_i\in R^{n_{i-1}-n_i}$; $|\theta_1|+\cdots+|\theta_{r-1}|=1$.

Если $r=1$, *то отображение не определяется.*

4) $\pi(K_0,K_1,\ldots,K_r;\overset{0}{\omega})$: $A\to \Pi^-\Phi(\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(\ldots\mathcal{D}_r(\varkappa(\overset{0}{\omega},\cdot)),0),\ldots),0)$: $\mathcal{H}^-(R)\to\mathcal{H}^-(R)$. *Здесь* $\overset{0}{\omega}\in S^{n_{r-1}-2}$, *отображение* $\varkappa: S^{n_{r-1}-2}\times R\to S^{n_{r-1}-1}$ *определено в начале этого параграфа.*

5) $\pi(K_0,K_1,\ldots,K_r;t)$:

$$A\to\Phi(\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(\ldots\mathcal{D}_r(S,0),0),\ldots),0)(1+t)/2+\Phi(\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(\ldots\mathcal{D}_r(N,0),0),\ldots),0)\times(1-t)/2.$$

Здесь S,N — *южный и северный полюсы сферы* $S^{n_{r-1}-1}, t\in(-1,1)$.

6) $\pi(\omega): A\to\Phi(\omega)$. *Здесь* $\omega\in S^{n-1}$.

7) $\pi(K;\lambda): A\to P_{\Omega_0}E^{-1}_{\omega\to\varphi}(\lambda)\Phi(\omega)E_{\psi\to\omega}(\lambda): L_2(\Omega_0)\to L_2(\Omega_0)$.

Здесь $\Omega_0=\Omega=K\cap S^{n-1}; \varphi,\omega,\psi\in S^{n-1}, \lambda\in R_\beta$.

Всякое неприводимое представление M^β_K *эквивалентно либо одному из представлений серий 6), 7), либо одному из представлений серий 1)–5) для некоторой исчерпывающей* K*-цепочки.*

Теорема 5.2. *Пусть* $\mathcal{K}=K\times R^{m-n}$, *где* K — *допустимый конус в* R^n, *алгебра* $M^\beta_{\mathcal{K}}$ *порождается операторами* $A=\Pi_{\mathcal{K}}F^{-1}_{\xi\to x}\Phi(\xi)F_{y\to\xi}$ *в пространстве* $L_2(\mathcal{K},|x^{(1)}|^\beta)$, $|\beta|<n/2$ (см. § 4). *Здесь* $\Phi\in C^\infty(R^m\setminus 0)$, *функция* Φ *однородна нулевой степени. Пусть еще* $\{K_i\}_{i=1}^r$ – *исчерпывающая* K*-цепочка.*

Следующие отображения продолжаются до неприводимых представлений алгебры $M^\beta_{\mathcal{K}}$:

1) $\pi(K;\theta_0): A\to\Pi_K F^{-1}_{\eta\to x}\Phi(\eta,\theta_0)F_{y\to\eta}: L_2(K,|x|^\beta)\to L_2(K,|x|^\beta)$; *здесь* $\eta,x,y\in R^n$; $\theta_0\in S^{m-n-1}$.

2) $\pi(\omega): A\to\Phi(\omega)$; *здесь* $\omega\in S^{m-1}$.

3) $\pi(K;\lambda)$: $A\to P_{\Omega_0}E^{-1}_{\omega\to\varphi}(\lambda)\Phi(\omega,0)E_{\psi\to\omega}(\lambda)$: $L_2(\Omega_0)\to L_2(\Omega_0)$; *здесь* $\Omega_0=\Omega=K\cap S^{n-1}; \omega,\varphi,\psi\in S^{n-1}, \lambda\in R_\beta$.

4) $\pi(K_0,\ldots,K_i;\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_i): A\to\Pi_{K_i}F^{-1}_{\eta\to x}\Phi(\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2\ldots(\mathcal{D}_i(\eta,\theta_i),\ldots),\theta_1),\theta_0)F_{y\to\eta}$: $L_2(K_i)\to L_2(K_i)$; *здесь* $x,y,\eta\in R^{n_i}, \theta_s\in R^{n_{s-1}-n_s}$ *для* $s>0, \theta_0\in R^{m-n}, |\theta_0|+\cdots+|\theta_i|=1, 0<i<r$.

Отображение определено при $r>1$.

5) $\pi(K_0,\ldots,K_i;\lambda)$: $A\to P_{\Omega_i}E^{-1}_{\omega\to\varphi}(\lambda)\Phi(\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2\ldots(\mathcal{D}_i(\omega,0),0),\ldots),0)E_{\psi\to\omega}(\lambda)$: $L_2(\Omega_i)\to L_2(\Omega_i)$; *здесь* $\varphi,\omega,\psi\in S^{n_i-1}, 0<i<r, \lambda\in R_0=R, r>1$. (*В скобках* i *поворотов и* $(i+1)$ *нулей*).

6) $\pi(K_0,K_1,\ldots,K_r;\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_{r-1};\eta'): A\to\Pi^-\Phi(\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(\ldots\mathcal{D}_r(\eta',\cdot),\theta_{r-1})\ldots),\theta_0)$: $\mathcal{H}^-(R)\to\mathcal{H}^-(R)$; *здесь* $\eta'\in R^{n_{r-1}-1}, \theta_i\in R^{n_{i-1}-n_i}$, *если* $i>0, \theta_0\in R^{m-n}, |\theta_0|+\cdots+|\theta_{r-1}|=1, r\geqslant 1$.

7) $\pi(K_0,K_1,\ldots,K_r;\overset{0}{\omega})$: $A\to\Pi^-\Phi(\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(\ldots\mathcal{D}_r(\varkappa(\overset{0}{\omega},\cdot)),0),\ldots 0),0)$: $\mathcal{H}^-(R)\to\mathcal{H}^-(R)$; *здесь* $\overset{o}{\omega}\in S^{n_{r-1}-2}, r\geqslant 1$, *в скобках* r *нулей.*

8) $\pi(K_0,K_1,\ldots,K_r;t)$: $A\to\Phi(\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(\ldots\mathcal{D}_r(S,0),0),\ldots),0)(1+t)/2+$ $+\Phi(\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(\ldots\mathcal{D}_r(N,0),0),\ldots 0),0)(1-t)/2$; *здесь* S,N — *южный и северный полюсы сферы* $S^{n_{r-1}-1}$, $t\in(-1,1), r\geqslant 1$.

Всякое неприводимое представление алгебры M_K^β эквивалентно либо одному из представлений серий 1)–3), либо одному из представлений серий 4)–8) для некоторой исчерпывающей K-цепочки.

Перейдем теперь к описанию спектра $(\Psi T)^\wedge$.

Пусть $\mathcal{U}(\cdot,\cdot) \in \Sigma_T$ (см.§ 2). Введем функцию

$$T \ni t \to N_{\mathcal{U}}(t) = \sup\{\|\mathcal{U}(\lambda, t); BL_2(\Omega(t))\|; \lambda \in R\}.$$

Предложение 5.3. *Функция $N_{\mathcal{U}}(\cdot)$ полунепрерывна сверху на T.*

Доказательство. Пусть $t_0 \in T, t_i \in T, t_i \to t_0$ при $t \to \infty$. Нужно показать, что

$$\varlimsup_{i\to\infty} N_{\mathcal{U}}(t_i) \leqslant N_{\mathcal{U}}(t_0).$$

Предположим, что $t_0 \in \partial T, K(t_0)$ — допустимый конус, $t_i \in G_r$ (G_r — „грань размерности r“ полиэдра T, прилежащая к t_0) (остальные возможности рассматриваются аналогично). В этом случае $K(t_i) = K_i \times R^r$, где K_i — допустимый конус в R^{n-r}. В силу требований к телу T можно считать, что $K(t_i) = K_0^r$ для любого i, где $K_0^r = (K(t_0))_\omega$ для некоторого $\omega \in S^{n-1}$. Пусть $\Omega_0^r = K_0^r \cap S^{n-1}$. В силу предложений 3.8 и 3.9 имеем

$$\begin{gathered}
\|\sum_m \prod_l P_{\Omega(t_0)} E^{-1}_{\omega\to\varphi}(\cdot) p^0_{ml}(t_0,\omega) E_{\psi\to\omega}(\cdot); CB(R; BL_2(\Omega(t_0)))\| \geqslant \\
\geqslant \inf\{\|\sum_m \prod_l P_{\Omega(t_0)} E^{-1}_{\omega\to\varphi}(\cdot) p^0_{ml}(t_0,\omega) E_{\psi\to\omega}(\cdot) P_{\Omega(t_0)} + \\
+ T(\cdot); CB(R; BL_2(S^{n-1}))\|; T(\cdot) \in C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1})\} \geqslant \\
\geqslant \inf\{\|[\sum_m \prod_l P_{\Omega(t_0)} E^{-1}_{\omega\to\varphi}(\cdot) p^0_{ml}(t_0,\omega) E_{\psi\to\omega}(\cdot) P_{\Omega(t_0)}] + \\
+ S; CB(R; BL_2(S^{n-1}))/C_0(R) \otimes KL_2(S^{n-1})\|; S \in \mathcal{A}(\omega)\} = \\
= \|\sum_m \prod_l P_{(\Omega(t_0))_\omega} E^{-1}_{\omega\to\varphi}(\cdot) p^0_{ml}(t_0,\omega) E_{\psi\to\omega}(\cdot); CB(R; \\
BL_2((\Omega(t_0))_\omega)\| = \|\sum_m \prod_l P_{\Omega_0^r} E^{-1}_{\omega\to\varphi}(\cdot) p^0_{ml}(t_0,\omega) E_{\psi\to\omega}(\cdot) P_{\Omega_0^r}; \\
CB(R, BL_2(S^{n-1}))\|.
\end{gathered}$$

Здесь $[\mathcal{U}(\cdot)]$ — класс вычетов в фактор-алгебре, $\mathcal{A}(\omega)$ определено в § 3. Осталось заметить, что

$$\begin{gathered}
\varlimsup_{i\to\infty} \|\sum_m \prod_l \Pi_{K(t_i)} F^{-1}_{\xi\to x} p^0_{ml}(t_i,\xi) F_{y\to\xi} \Pi_{K(t_i)}; BL_2(R^n)\| \leqslant \\
\leqslant \|\sum_m \prod_l \Pi_{K_0^r} F^{-1}_{\xi\to x} p^0_{ml}(t_0,\xi) F_{y\to\xi} \Pi_{K_0^r}; BL_2(R^n)\|
\end{gathered}$$

или, что то же самое,

$$\begin{gathered}
\varlimsup_{i\to\infty} \|\sum_m \prod_l P_{\Omega(t_i)} E^{-1}_{\omega\to\varphi}(\cdot) p^0_{ml}(t_i,\omega) E_{\psi\to\omega}(\cdot); \\
CB(R; BL_2(\Omega(t_i)))\| \leqslant \sum_m \prod_l P_{\Omega_0^r} E^{-1}_{\omega\to\varphi}(\cdot) p^0_{ml}(t_0,\omega) E_{\psi\to\omega}(\cdot) P_{\Omega_0^r}; \\
CB(R; BL_2(S^{n-1}))\|. \quad \bullet
\end{gathered}$$

Из предложения 5.3 стандартным рассуждением (ср. [1], лемма 5.5.3) выводим следующее утверждение.

Лемма 5.4. *Пусть I — замкнутый идеал в Σ_T, $I_t = \{\mathcal{U}(\cdot,t)|\mathcal{U} \in I\}$ — множество оператор-функций на R. Тогда $U \in I$ в том и только в том случае, если $\mathcal{U}(\cdot,t) \in I_t$ при всех $t \in T$.*

Отсюда следует, что всякое неприводимое представление алгебры Σ_T можно рассматривать как представление алгебры сужения $\Sigma_T|R\times\{t_0\}$ при некотором $t_0 \in T$. Это вместе с теоремами 2.1, 5.1, 5.2 и теоремой 6.1.7 из [1] дает возможность найти все неприводимые представления алгебры ΨT.

Теорема 5.5. *Пусть $\Pi_T p(x,\mathcal{D}) \in \Psi T, p^0(x,\xi)$ — главный символ оператора $p(x,\mathcal{D})$. Следующие отображения продолжаются до неприводимых представлений алгебры ΨT:*

1) $i : \Pi_T p(x,\mathcal{D}) \to \Pi_T p(x,\mathcal{D}) : L_2(T) \to L_2(T)$.

2)$\pi(t,\rho) : \Pi_T p(x,\mathcal{D}) \to \rho(\Pi_{K(t)} F^{-1}_{\xi\to x} p^0(t,\xi) F_{y\to\xi}) : H_\rho \to H_\rho$, *где ρ — неприводимое представление алгебры $M^0_{K(t)}$,$t \in T$, H_ρ — пространство представления ρ.*

Всякое неприводимое представление алгебры ΨT эквивалентно одному из перечисленных.

Список литературы

[1] Пламеневский Б. А., *Алгебры псевдодифференциальных операторов*, Наука, М., 1986.

[2] Кокотов А. Ю., *Спектр C^*-алгебры мультипликаторов Фурье в конусе*, Проблемы мат. анализа, Изд-во ЛГУ, Л., 1991.

[3] Трев Ф., *Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье*, т. 1, Мир, М., 1984.

[4] Симоненко И. Б., Чинь Нгок Минь, *Локальный метод в теории одномерных сингулярных интегральных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами. Нетеровость*, Изд-во Ростов. ун-та, Ростов, 1986.

[5] Muhly P., Renqult J., *C^*-algebra of Multivariable Wiener-Hopf Operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **274** (1982), 1–44.

[6] Dynin A., *Multivariable Wiener-Hopf operators. I. Representations*, Integral Equations and Operator Theory **9** (1986), 537–556.

[7] Диксмье Ж., *C^*-алгебры и их представления*, Наука, М., 1974.

[8] Хермандер Л., *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 1, Мир, М., 1986.

[9] Владимиров В. С., *Методы теории функций многих комплексных переменных*, Наука, М., 1964.

[10] Пламеневский Б. А., Сеничкин В. Н., *О представлениях алгебры псевдодифференциальных операторов с многомерными разрывами в символах*, Изв. АН СССР **51**, вып. 4 (1987), 833–859.

[11] Пламеневский Б. А., Сеничкин В. Н., *Представления C^*-алгебр, порожденных псевдодифференциальными операторами в пространствах с весом*, Проблемы мат. физики, Изд-во ЛГУ, Л., 1987, с. 165–189.

[12] Douglas R. G., *Banach algebra in the theory of Toeplitz operators*, Conf. Board of the Math. Sciences, Regional Conf. Ser. in Math. no. 15.

Ленинградский электротехнический
институт связи
191065, Ленинград, наб.р.Мойки, 61

Поступило 15 июня 1990 г.