А. Ю. Кокотов, Б. А. Пламеневский, О задаче Коши–Дирихле для гиперболических систем в клине, *Алгебра и анализ*, 1999, том 11, выпуск 3, 140–195

Алгебра и анализ
Том 11 (1999), вып. 3

О ЗАДАЧЕ КОШИ-ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КЛИНЕ

© А. Ю. Кокотов, Б. А. Пламеневский

Введение

Пусть $\mathbb{K}$ — открытый $(n-d)$-мерный конус в эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n-d}$, гладкий вне вершины. В цилиндре $Q = \{(x,t) : x \in \mathbb{K} \times \mathbb{R}^d, -\infty < t < +\infty\}$ рассматривается система уравнений $\mathcal{L}(D_x, D_t)u(x,t) := D_t^2 u(x,t) - \mathcal{P}(D_x)u(x,t) = f(x,t)$, где $\mathcal{P}(D_x)$ — сильно эллиптическая формально самосопряженная $(k\times k)$-матрица дифференциальных операторов второго порядка с постоянными коэффициентами. На границе ∂Q цилиндра задано условие Дирихле.

Главной целью является асимптотика решений вблизи ребра клина $\mathbb{D} = \mathbb{K} \times \mathbb{R}^d$. Для обоснования асимптотических формул развивается теория разрешимости указанной задачи в шкалах весовых пространств. В статье продолжаются исследования, начатые в [1, 2], где обсуждалось волновое уравнение $u_{tt}(x,t) - \Delta_x u(x,t) = f(x,t)$. Полученные результаты позволяют установить соответствующие факты и для задачи с переменными коэффициентами в произвольной области G с гладкими непересекающимися ребрами. Такой переход является стандартным (краткое описание см. в [2]); здесь мы его не обсуждаем. Не останавливаемся и на стандартном же переходе к задаче в полуцилиндре $G \times \{t > 0\}$ с нулевыми начальными условиями.

Как и в [1, 2], метод основан на „комбинированных" априорных оценках решений. Преобразование Фурье по времени и вдоль ребра приводит к задаче с параметром (ζ, τ) в конусе $\mathbb{K}$, $\zeta \in \mathbb{R}^d$, $\tau = \sigma - i\gamma$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$. В малой зоне у вершины применяется известная весовая эллиптическая оценка. Далеко от вершины устанавливается весовое „гиперболическое" неравенство; оно получается локализацией глобальной энергетической оценки. Склеивание в промежуточной зоне гиперболического и эллиптического неравенств требует от данных задачи

Ключевые слова: весовые пространства, ребра, асимптотика решений.
Поддержано грантами РФФИ 98-01-01091 и INTAS-RFBR 95-0414.

дополнительной гладкости по времени и вдоль ребра. Априорные оценки нужны для исследования разрешимости рассматриваемых задач в шкалах весовых пространств.

Даны две независимые реализации этой схемы; в каждой из них используется „своя" глобальная энергетическая оценка. В одном случае такая оценка имеет вид

$$\gamma^2 \int\limits_Q e^{-2\gamma t} |\nabla u(x,t)|^2 \, dx dt \leqslant c \int\limits_Q e^{-2\gamma t} |\mathcal{L}(D_x, D_t) u(x,t)|^2 \, dx dt \tag{0.1}$$

с постоянной c, не зависящей от $\gamma > 0$; предполагается, что $u \mid \partial Q = 0$. Это неравенство, конечно, известно. В другом случае (с неоднородным краевым условием) применяется неравенство

$$\gamma^2 \int\limits_Q e^{-2\gamma t} |\nabla u(x,t))|^2 \, dx dt + \gamma \int\limits_{\partial Q} e^{-2\gamma t} |\nabla_\nu u(x,t)|^2 \, ds dt$$
$$\leqslant c \Big\{ \int\limits_Q e^{-2\gamma t} |(\mathcal{L} u)(x,t)|^2 \, dx dt + \gamma \int\limits_{\partial Q} e^{-2\gamma t} |\nabla_\tau u(x,t)|^2 \, ds dt \Big\}, \tag{0.2}$$

где ∇_ν, ∇_τ — нормальная и касательная составляющие градиента. Такого рода неравенства для строго гиперболических уравнений произвольного порядка в гладких областях хорошо изучены (см. [3–7]). Мы не требуем строгой гиперболичности системы, однако (только в случае оценки (0.2)) подчиняем ее эллиптическую часть условию даже более ограничительному, чем сильная эллиптичность. В частности, для скалярных уравнений оно выполняется автоматически, а применительно к теории упругости это условие состоит в положительной определенности формы $a^{ij}_{kl}\xi^i_k\xi^j_l$ для всех матриц $\{\xi^i_k\}$ (а не только симметрических, как обычно); здесь $\{a^{ij}_{kl}\}$ — тензор упругой энергии. Система Ламе удовлетворяет указанному требованию лишь при $\mu > \lambda$ (λ и μ — постоянные Ламе). Отметим, что динамическая система Ламе с тремя пространственными переменными не является строго гиперболической (в смысле определения из [5]). Мы доказываем неравенство (0.2), следуя в основном методу Гординга [8] и Хёрмандера [9]. Вызвано ли упомянутое дополнительное условие существом дела или способом рассуждений, пока остается неясным.

В сравнении с (0.1) оценка (0.2) оказывается более избирательной не только по отношению к уравнениям, но и к областям. Соответствующие ограничения содержатся в предложении 3.5. Из примеров видно, что освободиться от них, вообще говоря, нельзя. (Конус, совпадающий с плоскостью, из которой удален луч, не подчиняется условиям предложения 3.5. Неравенство (0.2) не выполняется, скажем, для оператора $\mathcal{L}(D_x, D_t) = \partial_t^2 - \Delta_x$, что можно усмотреть из асимптотики решений вблизи начала луча).

С каждой из оценок (0.1) и (0.2) связываются шкалы весовых пространств. Роль веса играет $|y|^\beta e^{-\gamma t}$, где $|y|$ — расстояние от точки $x = (y, z) \in \mathbb{D}$ до ребра. В этих шкалах доказываются упомянутые комбинированные оценки при всех $\beta \leqslant 1$, $\beta \notin \{\beta_k\}$, где $\{\beta_k\}$ — некоторая последовательность, такая, что $1 > \beta_1 > \beta_2 > \ldots$, $\beta_k \to -\infty$. Задаче с параметром в конусе сопоставляется замкнутый оператор. Ядро и коядро этого оператора тривиальны, если $\beta \in (\beta_1, 1]$. С уменьшением β размерность коядра возрастает (при переходе β через β_k), оставаясь конечной. Элементы базиса в коядре однозначно определяются своей асимптотикой вблизи вершины. Все это позволяет описать асимптотику решений у вершины конуса, включая формулы для коэффициентов в асимптотике. Здесь используются результаты статей [11–12] об асимптотике решений эллиптических краевых задач в окрестности конических точек (см. также [13]). Обратным преобразованием Фурье теория переносится на задачу в клине.

Волновое уравнение $u_{tt}(x,t) - \Delta_x u(x,t) = f(x,t)$ с однородным краевым условием Дирихле в области с ребрами рассматривалось в [2] (реализация описанной схемы, основанная на оценке вида (0.1)). Некоторые результаты для волнового уравнения с неоднородным краевым условием анонсированы в заметке [1]; в настоящей статье, в частности, дано их доказательство.

Гиперболические задачи в негладких областях пока мало изучены. Укажем несколько работ, которые относятся к этой проблематике, хотя они и не использовались в предлагаемой статье. Волновое уравнение рассматривалось в [19] (клин с ребром коразмерности 2, явная формула для решений), [20] (области с ребрами, подход основан на функциональном исчислении для оператора Лапласа), [21, 22] (микролокальный анализ); см. также приведенную в этих статьях литературу. Книги [23–25] посвящены случаю „прямолинейной“ границы и построены главным образом на явных формулах. В [26] намечен некоторый общий подход, отличающийся от предложенного в [1] и [2].

Первые два параграфа статьи содержат комбинированные оценки в конусе, связанные с „универсальным“ неравенством (0.1). В §3 доказываются оценка (0.2) и соответствующие комбинированные неравенства. Существование и единственность решений задачи в конусе установлены в §4. Свойства операторов краевых задач в зависимости от весового показателя изучены в §5. Асимптотика решений задачи в конусе дана в §6. В последнем §7 формулируются окончательные результаты статьи для задачи в клине.

§1. Комбинированная оценка решений задачи в конусе

1. Функциональные пространства. Пусть $\mathbb{K}$ — открытый $(n-d)$-мерный конус в эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n-d}$. Вершина O конуса совпадает с началом координат; множество $\Omega = \mathbb{K} \cap S^{n-d-1}$ является областью с гладкой границей на единичной сфере S^{n-d-1}.

Пусть s — целое неотрицательное число и $\beta \in \mathbb{R}$. Введем пространство $H^s_\beta(\mathbb{K})$ как пополнение множества $C^\infty_c(\overline{\mathbb{K}} \setminus O)$ по норме

$$\|u; H^s_\beta(\mathbb{K})\| = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant s} \int_{\mathbb{K}} |y|^{2(\beta - s + |\alpha|)} |D^\alpha_y u(y)|^2 \, dy \right)^{1/2}. \tag{1.1}$$

Пространство $H^s_\beta(\mathbb{K}; q)$ с положительным параметром q наделяется нормой

$$\|u; H^s_\beta(\mathbb{K}; q)\| = \left(\sum_{k=0}^{s} q^{2k} \|u; H^{s-k}_\beta(\mathbb{K})\|^2 \right)^{1/2}. \tag{1.2}$$

Точки x клина $\mathbb{D} = \mathbb{K} \times \mathbb{R}^d$ будем записывать в виде $x = (y, z)$, где $y \in \mathbb{K}$, $z \in \mathbb{R}^d$. Обозначим через M ребро $O \times \mathbb{R}^d$ клина $\mathbb{D}$, а через Q — цилиндр $\{(x,t) : x \in \mathbb{D}, t \in \mathbb{R}\}$. Пространство $H^s_\beta(Q)$ есть пополнение множества $C^\infty_c((\overline{\mathbb{D}} \setminus M) \times \mathbb{R})$ по норме

$$\|w; H^s_\beta(Q)\| = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant s} \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{R}} |y|^{2(\beta - s + |\alpha|)} |D^\alpha_{x,t} w(x,t)|^2 \, dx dt \right)^{1/2}. \tag{1.3}$$

Норма в $H^s_\beta(Q; q)$ задается формулой (1.2) с Q вместо $\mathbb{K}$. Через $V^s_\beta(Q, \gamma)$ при $\gamma > 0$ обозначается пространство с нормой

$$\|w; V^s_\beta(Q; \gamma)\| = \|w^\gamma; H^s_\beta(Q; \gamma)\|, \tag{1.4}$$

где $w^\gamma(x,t) = \exp(-\gamma t) w(x,t)$.

Пусть

$$\widehat{w}(y,\zeta,\tau)=F_{(z,t)\to(\zeta,\tau)}w(y,z,t)=(2\pi)^{-(d+1)/2}\int e^{-i\zeta z-i\tau t}w(y,z,t)\,dz\,dt,$$

причем $\tau=\sigma-i\gamma$, $\sigma\in\mathbb{R}$. Положим

$$p=p(\zeta,\tau)=(|\zeta|^2+|\tau|^2)^{1/2},\quad \eta=py,\quad W(\eta,\zeta,\tau)=\widehat{w}(p^{-1}\eta,\zeta,\tau). \tag{1.5}$$

Можно проверить (см. [2]), что норма $\|w;V^s_\beta(Q;\gamma)\|$ эквивалентна каждой из следующих двух норм:

$$\begin{gathered}\left(\int\|\widehat{w}(\cdot,\zeta,\tau);H^s_\beta(\mathbb{K};p)\|^2\,d\zeta\,d\sigma\right)^{1/2},\\ \left(\int p^{d-n-2(\beta-s)}\|W(\cdot,\zeta,\tau);H^s_\beta(\mathbb{K};1)\|^2\,d\zeta\,d\sigma\right)^{1/2}\end{gathered} \tag{1.6}$$

(подразумевается, что в этих эквивалентностях соответствующие постоянные не зависят от $\gamma>0$).

2. Постановка задач в клине и конусе. Пусть $\mathcal{P}(D_x)$ обозначает $(k\times k)$-матрицу однородных дифференциальных операторов второго порядка с постоянными коэффициентами, $D_x=(-i\partial/\partial x_1,\dots,-i\partial/\partial x_n)$. Будем считать оператор $\mathcal{P}$ формально самосопряженным и сильно эллиптическим, т. е. таким, что

$$\langle\mathcal{P}(\xi)\eta,\eta\rangle\geqslant c_0|\xi|^2|\eta|^2 \tag{1.7}$$

с положительной постоянной c_0 и любыми $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\eta\in\mathbb{C}^k$; через $\langle,\rangle$ обозначено скалярное произведение в $\mathbb{C}^k$.

Рассмотрим задачу

$$\mathcal{L}(D_x,D_t)u(x,t):=u_{tt}(x,t)+\mathcal{P}(D_x)u(x,t)=f(x,t),\quad (x,t)\in\mathbb{D}\times\mathbb{R}, \tag{1.8}$$

$$u(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\mathbb{D}\times\mathbb{R}. \tag{1.9}$$

Применяя к равенствам (1.8), (1.9) преобразование Фурье $F_{(z,t)\to(\zeta,\tau)}$, получим задачу с параметром (ζ,τ) в конусе $\mathbb{K}$:

$$\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)\widehat{u}(y,\zeta,\tau) = \widehat{f}(y,\zeta,\tau), \quad u \in \mathbb{K}, \tag{1.10}$$

$$\widehat{u}(y,\zeta,\tau) = 0, \quad u \in \partial\mathbb{K}. \tag{1.11}$$

Перейдем к новым переменным

$$\eta = py, \qquad U(\eta,\zeta,\tau) = \widehat{u}(p^{-1}\eta,\zeta,\tau), \qquad F(\eta,\zeta,\tau) = p^{-2}\widehat{f}(p^{-1}\eta,\zeta,\tau)$$

и перепишем формулы (1.10), (1.11) в виде

$$\mathcal{L}(D_\eta,\theta)U(\eta,\zeta,\tau) = F(\eta,\zeta,\tau), \quad \eta \in \mathbb{K}, \tag{1.12}$$

$$U(\eta,\zeta,\tau) = 0, \quad \eta \in \partial\mathbb{K}, \tag{1.13}$$

причем

$$\theta = \theta(\zeta,\tau) = (\zeta p^{-1}, \tau p^{-1}), \quad \tau = \sigma - i\gamma, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad \gamma > 0. \tag{1.14}$$

3. Энергетическая оценка решений задачи (1.10), (1.11).

Предложение 1.1. *Для* $v \in C_c^\infty(\mathbb{K})$ *имеет место неравенство*

$$\gamma^2 \| v; \mathring{H}_0^1(\mathbb{K},p)\|^2 \leqslant c\|\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v; L_2(\mathbb{K})\|^2, \tag{1.15}$$

в котором постоянная c *не зависит от параметров* $\zeta \in \mathbb{R}^d$, $\tau = \sigma - i\gamma$ *при* $\sigma \in \mathbb{R}$ *и* $\gamma > 0$.

Доказательство. Для $u \in C_c^\infty(\mathbb{D}\times\mathbb{R})$ имеем

$$\int_{\mathbb{D}}\int_{-\infty}^{t} (\langle u_{tt}, u_t\rangle + \langle \mathcal{P}(D_x)u, u_t\rangle)dxdt = \int_{\mathbb{D}}\int_{-\infty}^{t} \langle f, u_t\rangle dxdt.$$

Складывая это равенство с комплексно сопряженным, получаем

$$\int_{\mathbb{D}}\int_{-\infty}^{t}(\partial_t|u_t|^2+\langle\mathcal{P}(D_x)u,u_t\rangle+\langle u_t,\mathcal{P}(D_x)u\rangle)dxdt$$
$$=2\operatorname{Re}\int_{\mathbb{D}}\int_{-\infty}^{t}\langle f,u_t\rangle dxdt. \tag{1.16}$$

Пусть $\|\cdot\|$ и $(,)$ — норма и скалярное произведение в $L_2(\mathbb{D})$. Ясно, что $(\mathcal{P}u(\cdot,t),u_t(\cdot,t))+(u_t(\cdot,t),\mathcal{P}u(\cdot,t))=(\mathcal{P}u(\cdot,t),u_t(\cdot,t))+(\mathcal{P}u_t(\cdot,t),u(\cdot,t))=\partial_t(\mathcal{P}u(\cdot,t),u(\cdot,t))$. Поэтому (1.16) переписывается в виде

$$\|u_t(\cdot,t)\|^2+(\mathcal{P}u(\cdot,t),u(\cdot,t))=2\operatorname{Re}\int_{\mathbb{D}}\int_{-\infty}^{t}\langle f,u_t\rangle dxdt. \tag{1.17}$$

Условие (1.7) влечет неравенство $(\mathcal{P}u(\cdot,t),u(\cdot,t))\geqslant c_0\|D_xu(\cdot,t)\|^2$. Вместе с (1.17) это приводит к оценке

$$\|u_t(\cdot,t)\|^2+\|D_xu(\cdot,t)\|^2\leqslant c\int_{-\infty}^{t}\|f(\cdot,t)\|\|u_t(\cdot,t)\|dt. \tag{1.18}$$

Обозначим через $h(t)$ подынтегральное выражение справа, умножим (1.18) на $e^{-2\gamma t}$ и проинтегрируем. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\gamma s}(\|u_s(\cdot,s)\|^2+\|D_xu(\cdot,s)\|^2)ds$$
$$\leqslant c\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\gamma s}ds\int_{-\infty}^{s}h(r)dr=c\int_{-\infty}^{+\infty}h(r)dr\int_{r}^{+\infty}e^{-2\gamma s}ds\leqslant\frac{c}{2\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}h(r)e^{-2\gamma r}dr$$
$$\leqslant\frac{c}{2\gamma}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\gamma t}\|f(\cdot,t)\|^2dt\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\gamma t}\|u_t(\cdot,t)\|^2dt\right)^{1/2}. \tag{1.19}$$

Из (1.19) следует, что

$$\gamma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\gamma t}(\|u_t(\cdot,t)\|^2 + \|D_x u(\cdot,t)\|^2)dt \leqslant c \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\gamma t}\|f(\cdot,t)\|^2 dt. \tag{1.20}$$

Выберем в (1.20) функцию $u(x,t) = \psi(z,t)v(y)$, где $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ и $v \in C_c^\infty(\mathbb{K})$. Формула (1.20) принимает вид

$$\gamma^2 \int |\widehat{\psi}(\zeta, \sigma - i\gamma)|^2(p^2|v(y)|^2 + |D_y v(y)|^2)dy d\zeta d\sigma$$
$$\leqslant c \int |\widehat{\psi}(\zeta,\sigma - i\gamma)|^2 |\mathcal{L}(D_y, \zeta, \sigma - i\gamma)v(y)|^2 dy d\zeta d\sigma.$$

Благодаря произвольности ψ это означает, что

$$\gamma^2 \int_{\mathbb{K}} (p^2|v(y)|^2 + |D_y v(y)|^2)dy \leqslant c \int_{\mathbb{K}} |\mathcal{L}(D_y,\zeta,\sigma - i\gamma)v(y)|^2 dy.$$

Учитывая известное неравенство

$$\int_{\mathbb{K}} |v(y)|^2/|y|^2 dy \leqslant c \int_{\mathbb{K}} |Dv(y)|^2 dy,$$

получаем оценку (1.15). •

Теперь мы распространим неравенство (1.15) на линеал, натянутый на $C_c^\infty(\mathbb{K})$ и функции специального вида. Для этого понадобится некоторая подготовка. Напомним, что $\mathcal{L}(D_x, D_t)u = u_{tt} + \mathcal{P}(D_x)u$, и свяжем с эллиптической частью $\mathcal{P}$ операторный пучок $\mathfrak{A}$. Именно, записывая $\mathcal{P}(D_x)$ в виде $\mathcal{P}(D_y, D_z)$, определим $\mathfrak{A}(\lambda)$ равенством

$$\mathfrak{A}(\lambda)\varphi(\omega) = |y|^{-i\lambda+2}\mathcal{P}(D_y,0)|y|^{i\lambda}\varphi(\omega), \tag{1.21}$$

где $\omega = y/|y|$. Пучок $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \mathfrak{A}(\lambda)$ оказывается $(k \times k)$-матрицей дифференциальных операторов второго порядка на сфере S^{n-d-1}; эти операторы — полиномы относительно λ степени не выше 2. Будем рассматривать $\mathfrak{A}(\lambda)$ в области

$\Omega = \mathbb{K} \cap S^{n-d-1}$ на функциях $\varphi \in H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$; здесь $H^s(\Omega)$ — пространство Соболева и $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ — замыкание множества $C_c^\infty(\Omega)$ в норме $H^1(\Omega)$. Известно (см. [14]), что спектр пучка $\mathfrak{A}$ состоит из нормальных собственных значений; все они (за исключением разве лишь конечного числа) расположены в двойном угле $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\pm\pi/2 - \arg\lambda| < \pi/2 - \delta\}$, где $0 < \delta < \pi/2$.

Пусть λ_0 — собственное число $\mathfrak{A}$, $\varkappa_1 \geqslant \cdots \geqslant \varkappa_j$ — частные кратности λ_0 и $\{\varphi^{0,j}, \ldots, \varphi^{\varkappa_j - 1, j}; j = 1, \ldots, J\}$ — каноническая система жордановых цепочек, отвечающая числу λ_0 (по поводу этих понятий см. [15] или, например, [13]). Положим

$$v_{q,j}(y) = |y|^{i\lambda_0} \sum_{p=0}^{q} \frac{1}{p!} (i \log|y|)^p \varphi^{(q-p,j)}(\omega), \tag{1.22}$$

где $\omega = y/|y|$, $q = 0, 1, \ldots, \varkappa_j - 1$, $j = 1, \ldots, J$.

Предложение 1.2. *Пусть* $\chi \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{K}})$, $\chi = 1$ *вблизи вершины конуса. Если* $2\operatorname{Im}\lambda_0 < n - d - 2$, *то функции* $\chi v_{q,j} + w$, *где* $w \in C_c^\infty(\mathbb{K})$, *принадлежат* $H_0^1(\mathbb{K})$ *и подчиняются оценке* (1.15).

Доказательство. Включение $\chi v_{q,j} \in H_0^1(\mathbb{K})$ следует из определения нормы (1.1). Проверим неравенство (1.15) для $v = \chi v_{q,j} + w$. Пусть $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ и $u(y,z,t) = \psi(z,t)v(y)$. Заметим, что $\mathcal{P}(D_y, 0)v_{q,j}(y) = 0$ в $\mathbb{K}$. Значит, функция $(y,z,t) \mapsto e^{-\gamma t}\mathcal{L}(D_y, D_z, D_t)u(y,z,t)$ принадлежит пространству $L_2(Q)$. Это позволяет повторить вывод неравенства (1.20) для только что указанной функции u. Отсюда вытекает оценка (1.15) для v. •

4. Комбинированная весовая оценка решений задачи (1.10), (1.11). Обозначим через $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\beta$ линейное множество, натянутое на функции $w \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{K}} \setminus 0)$, подчиненные условию $w \mid \partial\mathbb{K} = 0$, и функции вида $\chi v_{q,j}$; здесь $v_{q,j}$ определяется формулой (1.22), а в качестве λ_0 может фигурировать любое собственное число пучка $\mathfrak{A}$ такое, что $2\operatorname{Im}\lambda_0 < 2\beta + (n-d) - 4$.

Предложение 1.3. *Пусть число* β *таково, что* $\beta \leqslant 1$ *и прямая* $\operatorname{Im}\lambda = \beta + (n - d)/2 - 2$ *не содержит точек спектра пучка* $\mathfrak{A}$. *Тогда для* $v \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\beta$ *справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} &\|\chi_p v; H_\beta^2(\mathbb{K}; p)\|^2 + \gamma^2 \|v; H_\beta^1(\mathbb{K}; p)\|^2 \\ &\qquad \leqslant c\{\|f; H_\beta^0(\mathbb{K})\|^2 + (p^{1-\beta}/\gamma)^2 \|f; L_2(\mathbb{K})\|^2\}, \end{aligned} \tag{1.23}$$

где $f = \mathcal{L}(D_y, \zeta, \tau)v$, $\chi_p(y) = \chi(py)$, *а* χ — *какая-нибудь (фиксированная) функция из* $C_c^\infty(\overline{\mathbb{K}})$ *такая, что* $\chi = 1$ *вблизи вершины конуса. Постоянная* c *в* (1.23) *не зависит ни от* v, *ни от параметров* $\zeta \in \mathbb{R}^d$ *и* $\tau = \sigma - i\gamma$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$.

Доказательство. Заметим, что замена переменных $y \mapsto \eta = py$ превращает (1.23) в эквивалентное неравенство

$$\begin{aligned} &\|\chi U; H^2_\beta(\mathbb{K};1)\|^2 + (\gamma/p)^2 \|U; H^1_\beta(\mathbb{K};1)\|^2 \\ &\qquad \leqslant c\{\|F; H^0_\beta(\mathbb{K})\|^2 + (p/\gamma)^2\|F; L_2(\mathbb{K})\|^2\}, \end{aligned} \tag{1.24}$$

где $F = \mathcal{L}(D_\eta, \theta)U$, $\theta = (\zeta/p, \tau/p)$.

Проверку формулы (1.23) разобьем на три шага.

1) Оценка в окрестности вершины конуса. Задача (1.12), (1.13) эллиптическая. Поэтому в отсутствие на прямой $\operatorname{Im}\lambda = \beta + (n-d)/2 - 2$ собственных чисел пучка $\mathfrak{A}$ имеет место неравенство

$$\|\chi U; H^2_\beta(\mathbb{K};1)\|^2 \leqslant c\{\|\chi\mathcal{L}(D_\eta,\theta)U; H^0_\beta(\mathbb{K})\|^2 + \|\psi U; H^1_\beta(\mathbb{K};1)\|^2\}, \tag{1.25}$$

где $\psi \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{K}})$, $\chi\psi = \chi$, U — любая функция из $H^2_\beta(\mathbb{K};1)$ с условием $U \mid \partial\mathbb{K} = 0$ (см. [10] или, например, [13]).

2) Оценка вдали от вершины конуса. Пусть $\varkappa_\infty$, ψ_∞ — гладкие функции в $\overline{\mathbb{K}}$, равные нулю около вершины конуса и единице в окрестности бесконечности, причем $\psi_\infty\varkappa_\infty = \varkappa_\infty$. Покажем, что для любого $\beta \in \mathbb{R}$ и всех $U \in H^2_\beta(\mathbb{K};1)$, подчиненных условию $U \mid \partial\mathbb{K} = 0$, выполняется неравенство

$$\begin{aligned} &(\gamma/p)^2\|\varkappa_\infty U; H^1_\beta(\mathbb{K};1)\|^2 \\ &\qquad \leqslant c\{\|\varkappa_\infty\mathcal{L}(D_\eta,\theta)U; H^0_\beta(\mathbb{K})\|^2 + \|\psi_\infty U; H^1_{\beta-1}(\mathbb{K},1)\|^2\} \end{aligned} \tag{1.26}$$

при всех $\gamma > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$ и $\zeta \in \mathbb{R}^d$; как и в (1.24), $\theta = (\zeta/p, \tau/p)$. Постоянная c в (1.26) не зависит от параметров γ, σ и ζ.

Пусть ψ, $\varkappa \in C^\infty(\overline{\mathbb{K}})$, $\psi\varkappa = \varkappa$, $\operatorname{supp}\varkappa \subset \{y : 1/2 < |y| < 2\}$ и $\operatorname{supp}\psi \subset \{y : 1/4 < |y| < 4\}$. Имеем $\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)\varkappa U = \varkappa\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)U + [\mathcal{L},\varkappa]U$, где, как обычно, $[\mathcal{L},\varkappa]U = \mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)\varkappa U - \varkappa\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)U$. Ясно, что

$$\|[\mathcal{L},\varkappa]U; L_2(\mathbb{K})\| \leqslant \|\psi U; H^1(\mathbb{K};p)\|,$$

где $\|v; H^1(\mathbb{K}; p)\|^2 := \|v; H^1(\mathbb{K})\|^2 + p^2\|v, L_2(\mathbb{K})\|^2$ и $H^1(\mathbb{K})$ — пространство Соболева в $\mathbb{K}$. В силу (1.15) отсюда следует неравенство

$$\gamma^2\|\varkappa U; H^1(\mathbb{K}; p)\|^2 \leqslant c\{\|\varkappa\mathcal{L}(D_y, \zeta, \tau)U; L_2(\mathbb{K})\|^2 + \|\psi U; H^1(\mathbb{K}; p)\|^2\}. \qquad (1.27)$$

Подставим в (1.27) вместо U функцию $y \mapsto U^\varepsilon(y) = U(\varepsilon^{-1}y)$, а в качестве (ζ, τ) возьмем $(\zeta/\varepsilon p, \tau/\varepsilon p)$ с положительным ε. Тогда (1.27) примет вид

$$\begin{aligned}&(\gamma/\varepsilon p)^2\|\varkappa U^\varepsilon; H^1(\mathbb{K}; \varepsilon^{-1})\|\\ &\qquad\leqslant c\{\|\varkappa\mathcal{L}(D_y, \theta/\varepsilon)U^\varepsilon; L_2(\mathbb{K})\|^2 + \|\psi U^\varepsilon; H^1(\mathbb{K}; \varepsilon^{-1})\|^2\}.\end{aligned}$$

Заменим переменные $y \mapsto \eta = |y|/\varepsilon$ и умножим неравенство на $\varepsilon^{4-(n-d)}$. В результате получим

$$\begin{aligned}&(\gamma/p)^2\|\varkappa_\varepsilon U; H^1(\mathbb{K})\|^2\\ &\qquad\leqslant c\{\|\varkappa_\varepsilon\mathcal{L}(D_\eta, \theta)U; L_2(\mathbb{K})\|^2 + \varepsilon^2\|\psi_\varepsilon U; H^1(\mathbb{K})\|^2\},\end{aligned} \qquad (1.28)$$

где $\varkappa_\varepsilon(\eta) = \varkappa(\varepsilon\eta)$ и т. п. Умножим (1.28) на $\varepsilon^{-2\beta}$, положим $\varepsilon = 2^{-j}$, $j = 1, 2, \ldots$, и, складывая эти неравенства, придем к оценке (1.26). Для того чтобы проследить появление норм $\|\cdot; H^s_\beta(\mathbb{K})\|$, нужно учесть, что $1/(4\varepsilon) < |\eta| < 4/\varepsilon$ на носителе функции $\eta \mapsto \psi_\varepsilon(\eta)$, и вспомнить определение нормы в $H^s_\beta(\mathbb{K}, 1)$ (см. (1.1) и (1.2)).

3) Глобальная оценка. Сложим неравенства (1.25) и (1.26). После сложения срезка $\varkappa_\infty$ в левой части уже не нужна; в самом деле, считая, что $\varkappa_\infty = 1$ вне носителя χ, имеем

$$(\gamma/p)\|(1 - \varkappa_\infty)U; H^1_\beta(\mathbb{K}; 1)\| \leqslant c\|\chi U; H^2_\beta(\mathbb{K}; 1)\|.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}&\|\chi U; H^2_\beta(\mathbb{K}; 1)\|^2 + (\gamma/p)^2\|U; H^1_\beta(\mathbb{K}; 1)\|^2\\ &\qquad\leqslant c\{\|\mathcal{L}(D_\eta, \theta)U; H^0_\beta(\mathbb{K})\|^2 + \|\psi_\infty U; H^1_{\beta-1}(\mathbb{K}; 1)\|^2\}.\end{aligned}$$

Заменяя переменные $\eta \mapsto y = p^{-1}\eta$, приходим к оценке

$$\begin{aligned}&\|\chi_p v; H^2_\beta(\mathbb{K}; p)\|^2 + \gamma^2\|v; H^1_\beta(\mathbb{K}; p)\|^2\\ &\qquad\leqslant c\{\|\mathcal{L}(D_y, \zeta, \tau)v; H^0_\beta(\mathbb{K})\|^2 + \|\psi_{\infty,p}v; H^1_{\beta-1}(\mathbb{K}; p)\|^2\},\end{aligned} \qquad (1.29)$$

где $\chi_p(y) = \chi(py)$, $\psi_{\infty,p}(y) = \psi_\infty(py)$, $v(y) = U(py)$. Займемся последним слагаемым в правой части (1.29). Учитывая расположение носителя срезки $\psi_{\infty,p}$ и условие $\beta \leqslant 1$ (которое до сих пор не использовалось), получаем

$$\begin{aligned}
&\|\psi_{\infty,p}v; H^1_{\beta-1}(\mathbb{K};p)\|^2 \\
&\leqslant c \int\limits_{c_1/p<|y|} |y|^{2(\beta-1)}(|\nabla v|^2 + |y|^{-2}|v|^2 + p^2|v|^2)dy \\
&\leqslant cp^{2(1-\beta)} \int\limits_{\mathbb{K}} \{|\nabla v|^2 + (|y|^{-2} + p^2)|v|^2\}dy.
\end{aligned}$$

Применим теперь неравенство (1.15) и придем к соотношению

$$\|\psi_{\infty,p}v; H^1_{\beta-1}(\mathbb{K};p)\|^2 \leqslant c(p^{1-\beta}/\gamma)^2\|\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v; L_2(\mathbb{K})\|^2. \tag{1.30}$$

Сопоставление (1.29) и (1.30) приводит к (1.23). •

Замечание 1.4. Если прямая $\operatorname{Im}\lambda = \beta+(n-d)/2-2$ содержит собственное число μ пучка $\mathfrak{A}$, то оценка (1.25) опровергается последовательностью $\chi(r)\eta(\ln r + N)r^{i\mu}\varphi(\omega)$, где $\eta \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$, $\eta(r) = 0$ при $r < 1$ и $\eta(r) = 1$ для $r > 2$; φ — собственная функция пучка $\mathfrak{A}$, отвечающая числу μ; $N = 1, 2, \dots$ Если к тому же $\beta \leqslant 0$, то указанная последовательность опровергает и оценку (1.24).

§2. Повышение гладкости в комбинированной оценке

В этом параграфе доказывается неравенство типа (1.23) с „повышенной гладкостью“; именно оценивается величина $\|\chi_p v; H^{2+q}_{\beta+q}(\mathbb{K};p)\| + \gamma\|v; H^{1+q}_{\beta+q}(\mathbb{K};p)\|$ при $q = 0, 1, \dots$ Точная формулировка дана в предложении 2.8, частным случаем которого (для $q = 0$) является предложение 1.3.

Сохраняется общая схема рассуждений, использованная в доказательстве предложения 1.3. Сначала устанавливаем локальную оценку с повышенной гладкостью, заменяющую неравенство (1.27). С ее помощью, разбивая конус на зоны, получаем оценку вне вершины. В окрестности вершины нужное неравенство доставляется эллиптической теорией. Это приводит к соотношению типа (1.29), правая часть которого содержит (кроме значения оператора) подоператорную функцию. Такое слагаемое оценивается по индукции с предложением 1.3 на первом шаге.

1. Оценка в зоне $\{y \in \mathbb{K} : 1/2 < |y| < 2\}$. Займемся сначала внутренней оценкой. Пусть U — открытое подмножество в $\{y \in \mathbb{K} : 1/2 < |y| < 2\}$ ($\mathbb{K}$ — открытый конус), $\overline{U} \subset \mathbb{K}$ и φ, $\psi \in C_c^\infty(U)$. Будем считать, что $\psi = 1$ на открытом множестве, содержащем $\operatorname{supp} \varepsilon$.

Лемма 2.1. *Для* $u \in C^\infty(U)$ *при всех* $\zeta \in \mathbb{R}^d$, $\tau = \sigma - i\gamma$, *где* $\sigma \in \mathbb{R}$ *и* $\gamma > 0$, *справедливо неравенство*

$$\gamma^2 \|\varphi u; H^{s+1}(\mathbb{K}; p)\|^2 \leqslant c\{\|\psi \mathcal{L}(D_y, \zeta, \tau)u; H^s(\mathbb{K}; p)\|^2 + \|\psi u; H^{s+1}(\mathbb{K}; p)\|^2\}; \quad (2.1)$$

здесь $s = 0, 1, \ldots$

Доказательство. Имеем

$$\mathcal{L}(D_y, \zeta, \tau)\varphi u = \varphi \mathcal{L} u + [\mathcal{L}, \varphi]u. \quad (2.2)$$

Заметим, что для $s = 0, 1, \ldots$

$$\|[\mathcal{L}, \varphi]u; H^s(\mathbb{K}; p)\| \leqslant c\|\psi u; H^{s+1}(\mathbb{K}; p)\|. \quad (2.3)$$

Поэтому из неравенства (1.15) и формулы (2.1) вытекает оценка

$$\gamma^2 \|\varphi u; H^1(\mathbb{K}; p)\|^2 \leqslant c\{\|\psi \mathcal{L} u; L_2(\mathbb{K})\|^2 + \|\psi u; H^1(\mathbb{K}; p)\|^2\}. \quad (2.4)$$

В (2.1)–(2.4) функцию u можно заменить на $D_j u$, где $D_j = -i\partial/\partial y_j$, $j = 1, \ldots, n-d$. Значит,

$$\gamma^2 \|\varphi D_j u; H^1(\mathbb{K}; p)\|^2 \leqslant c\{\|\varphi D_j \mathcal{L} u; L_2(\mathbb{K})\|^2 + \|\psi D_j u; H^1(\mathbb{K}; p)\|^2\}. \quad (2.5)$$

Сложим неравенства (2.5) и умноженное на p^2 неравенство (2.4). Мы получили оценку (2.1) при $s = 0$ и $s = 1$. Ясно, что подобным образом проверяется (2.1) и для остальных $s = 2, 3, \ldots$ •

Перейдем к оценке вблизи границы. Будем считать U подобластью в множестве $\{y \in \overline{\mathbb{K}} : 1/2 < |y| < 2\}$ такой, что в окрестности пересечения $U \cap \partial\mathbb{K}$ граница $\partial\mathbb{K}$ допускает представление $y_{n-d} = h(y_1, \ldots, y_{n-d-1})$, где h — однородная функция степени 1, гладкая вне начала координат. Введем новые переменные $y'_1 = y_1, \ldots, y'_{n-d-1} = y_{n-d-1}$, $y'_{n-d} = y_{n-d} - h(y_1, \ldots, y_{n-d-1})$; в координатах y' множество $\partial\mathbb{K} \cap U$ является плоским. Выражение $-\mathcal{L}(D_y, D_z, D_t) = \partial_t^2 + \mathcal{P}(D_y, D_z)$ переписывается в виде $\partial_t^2 + S(y'; D_{y'}, D_z) =: \mathcal{M}(y'; D_{y'}, D_z, D_t)$. В следующей лемме встречаются только координаты y'; будем обозначать их снова y.

Лемма 2.2. *Пусть* $v \in C_c^\infty(U)$, $v \mid (\partial\mathbb{K} \cap U) = 0$. *Тогда*

$$\gamma^2 \|v; H^1(U;p)\|^2 \leqslant c\{\|\mathcal{M}(y, D_y, \zeta, \tau)v; L_2(U)\|^2 + \|v; H^1(U;p)\|^2\}, \tag{2.6}$$

причем постоянная c *не зависит ни от* v, *ни от параметров* $\zeta \in \mathbb{R}^d$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$.

Доказательство. Представим S как сумму $S_0 + S_1$, где S_0 — формально самосопряженный оператор и $\operatorname{ord} S_1 \leqslant 1$. Поскольку S_0 — сильно эллиптический оператор, то выполняется неравенство Гординга

$$(S_0 v, v) \geqslant c_0 \|v; H^1(U)\| - C\|v; L_2(U)\| \tag{2.7}$$

с постоянными $c_0 > 0$ и C.

Пусть $u \in C_c^\infty(U \times \mathbb{R}^{d+1})$, $u = 0$ на $\partial U \times \mathbb{R}^{d+1}$. (При $f = \mathcal{M}(y, D_y, D_z, D_t)u$ имеем

$$\int_{-\infty}^{t} (\partial_t \|u_t\|^2 + (Su, u_t) + (u_t, Su))dt = 2\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{t} (f, u_t)dt \tag{2.8}$$

(ср. с (1.16)); здесь и далее $\|\cdot\|$ и $(,)$ обозначают норму и скалярное произведение в $L_2(U)$). Ясно, что

$$(Su, u_t) + (u_t, Su) = \partial_t(S_0 u, u) + 2\operatorname{Re}(S_1 u, u_t).$$

Поэтому из (2.7) и (2.8) следует, что

$$\begin{aligned} &\|u_t(\cdot, t)\|^2 + \|u(\cdot, t); H^1(U)\|^2 \\ &\qquad \leqslant c \int_{-\infty}^{t} (\|f(\cdot, s)\| + \|u(\cdot, s); H^1(U)\|)\|u_s(\cdot, s)\|ds. \end{aligned}$$

Умножим это неравенство на $e^{-2\gamma t}$, проинтегрируем и получим (ср. (1.19) и (1.20))

$$\begin{aligned} &\gamma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\gamma t}(\|u_t(\cdot, t)\|^2 + \|u(\cdot, t); H^1(U)\|^2 dt \\ &\qquad \leqslant c \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\gamma t}(\|f(\cdot, t)\|^2 + \|u(\cdot, t); H^1(U)\|^2)dt. \end{aligned}$$

Полагая, как и в доказательстве предложения 1.1, $u(y, z, t) = \psi(z, t)v(y)$, приходим к неравенству (2.6). •

Лемма 2.3. *Пусть* $v \in C_c^\infty(U)$, $v \mid (\partial\mathbb{K} \cap U) = 0$. *Тогда*

$$\gamma^2 \|v; H^{s+1}(U,p)\|^2 \leqslant c\{\|\mathcal{M}(y, D_y, \zeta, \tau)v; H^s(U;p)\|^2 + \|v; H^{s+1}(U;p)\|^2\}. \quad (2.9)$$

Доказательство. Дифференцируя равенство $\mathcal{M}v = g$ по касательным переменным y_j, $j = 1, \ldots, n-d-1$, имеем $\mathcal{M}v_j + \mathcal{M}_j v = g_j$, где $v_j = -i\partial v/\partial y_j$, а оператор $\mathcal{M}_j$ получается из $\mathcal{M}$ дифференцированием коэффициентов. В силу (2.6) отсюда следует, что

$$\gamma^2 \sum_{j=1}^{n-d-1} \|v_j; H^1(U;p)\|^2 \leqslant c\{\|\mathcal{M}v; H^1(U;p)\|^2 + \|v; H^2(U;p)\|^2\}. \quad (2.10)$$

Уравнение $\mathcal{M}v = g$ можно разрешить относительно производной $D^2_{n-d}v$ (по нормальному направлению к границе). Полученное выражение оценивается с помощью (2.10) и умноженного на p^2 неравенства (2.6). Мы приходим таким образом к оценке (2.9) при $s = 1$ (для $s = 0$ она совпадает с (2.6)). Повторяя тот же прием, получим (2.9) и для остальных $s = 2, 3, \ldots$ •

Леммы 2.1–2.3 и разбиение единицы позволяют доказать следующее утверждение.

Лемма 2.4. *Пусть* ψ, $\varkappa \in C^\infty(\overline{\mathbb{K}})$, $\psi\varkappa = \varkappa$, $\operatorname{supp}\varkappa \subset \{y : 1/2 < |y| < 2\}$ *и* $\operatorname{supp}\psi \subset \{y : 1/4 < |y| < 4\}$. *Для функций* $v \in C^\infty(\overline{\mathbb{K}})$, *подчиненных условию* $v \mid \partial\mathbb{K} = 0$, *справедливо неравенство*

$$\gamma^2 \|\varkappa v; H^{s+1}(\mathbb{K};p)\|^2 \leqslant c\{\|\psi\mathcal{L}(D_y, \zeta, \tau)v; H^s(\mathbb{K};p)\|^2 + \|\psi v; H^{s+1}(\mathbb{K};p)\|^2\}, \quad (2.11)$$

где $s = 0, 1, \ldots$, *а постоянная* c *не зависит ни от* v, *ни от параметров* $\zeta \in \mathbb{R}^d$, $\tau = \sigma - i\gamma$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$.

2. Оценка вне вершины конуса. Пусть $\varkappa_\infty$, ψ_∞ — гладкие функции в $\overline{\mathbb{K}}$, равные нулю около вершины конуса и единице в окрестности бесконечности, причем $\varkappa_\infty\psi_\infty = \varkappa_\infty$.

Лемма 2.5. *Для любого числа $\beta \in \mathbb{R}$ и всех $U \in H^{s+2}_\beta(\mathbb{K}, 1)$, подчиненных условию $U \mid \partial\mathbb{K} = 0$, справедливо неравенство*

$$(\gamma/p)^2 \|\varkappa_\infty U; H^{s+1}_\beta(\mathbb{K}; 1)\|^2 \\ \leqslant c\{\|\psi_\infty \mathcal{L}(D_\eta, \theta)U; H^s_\beta(\mathbb{K}; 1)\|^2 + \|\psi_\infty U; H^{s+1}_{\beta-1}(\mathbb{K}; 1)\|^2\}, \tag{2.12}$$

где $\theta = (\zeta/p, \tau/p)$, $s = 0, 1, \dots$, а c не зависит ни от U, ни от параметров.

Доказательство аналогично выводу неравенства (1.26); вместо оценки (1.27) следует использовать формулу (2.11). •

3. Оценка вблизи вершины конуса.

Лемма 2.6 ([10] или, например, [13]). *Пусть χ, $\psi \in C^\infty_c(\overline{\mathbb{K}})$, $\chi = 1$ вблизи вершины конуса, $\chi\psi = \chi$. Пусть еще на прямой $\operatorname{Im}\lambda = \beta - s + (n-d)/2 - 2$ нет собственных чисел пучка $\mathfrak{A}$ (см. (1.21)). Тогда для всех функций $U \in H^{s+2}_\beta(\mathbb{K}; 1)$ таких, что $U \mid \partial\mathbb{K} = 0$, имеет место неравенство*

$$\|\chi U; H^{s+2}_\beta(\mathbb{K}; 1)\|^2 \leqslant c\{\|\psi \mathcal{L}(D_\eta, \theta)U; H^s_\beta(\mathbb{K}; 1)\|^2 + \|\psi U; H^{s+1}_\beta(\mathbb{K}; 1)\|^2\}. \tag{2.13}$$

4. Комбинированная оценка с повышенной гладкостью. Следующая лемма содержит обобщение (с повышенной гладкостью) оценки (1.29).

Лемма 2.7. *Пусть прямая $\operatorname{Im}\lambda = \beta + (n-d)/2 - 2$ свободна от спектра пучка $\mathfrak{A}$. Тогда для $q = 0, 1, \dots$ и всех $v \in H^{2+q}_{\beta+q}(\mathbb{K}; p)$, удовлетворяющих условию $v \,|\, \partial\mathbb{K} = 0$, выполняется неравенство*

$$\|\chi_p v; H^{2+q}_{\beta+q}(\mathbb{K}; p)\|^2 + \gamma^2 \|v; H^{1+q}_{\beta+q}(\mathbb{K}; p)\|^2 \\ \leqslant c\{\|\mathcal{L}(D_y, \zeta, \tau)v; H^q_{\beta+q}(\mathbb{K}; p)\|^2 + \|\psi_{\infty,p} v; H^{1+q}_{\beta+q-1}(\mathbb{K}; p)\|^2\}; \tag{2.14}$$

здесь, как и прежде, $\chi \in C^\infty_c(\overline{\mathbb{K}})$, $\chi = 1$ вблизи вершины конуса, $\psi_\infty \in C^\infty(\overline{\mathbb{K}})$, $\psi = 0$ около начала координат и $\psi = 1$ в окрестности бесконечности, $\chi_p(y) = \chi(py)$, $\psi_{\infty,p}(y) = \psi_\infty(py)$; постоянная c не зависит ни от v, ни от параметров $\zeta \in \mathbb{R}^d$, $\tau = \sigma - i\gamma$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$.

Доказательство. Ясно, что условие леммы 2.6 выполнено с заменой β и s на $\beta + q$ и q. Сложим неравенства (2.12) и (2.13) для таких β и s, избавимся от срезки $\varkappa_\infty$ в левой части (после сложения она становится ненужной) и совершим замену переменных $\eta \mapsto y = \eta p^{-1}$. В результате получим оценку (2.14). •

Теперь, наконец, все готово для обсуждения основного результата этого параграфа. Положим

$$\{f\}_{q,\beta}(\mathbb{K}; p, \gamma)^2 \\ = \sum_{j=0}^{q} (p/\gamma)^{2j} \|f; H^{q-j}_{\beta+q-j}(\mathbb{K}; p)\|^2 + (p^{1-\beta+q}/\gamma^{1+q})^2 \|f; L_2(\mathbb{K})\|^2, \quad (2.15)$$

где $\beta \in \mathbb{R}$ и $q = 0, 1, \ldots$

Предложение 2.8. *Пусть выполнены условия предложения* 1.3. *Тогда для* $v \in \mathring{\mathcal{D}}_\beta$ *справедливо неравенство*

$$\|\chi_p v; H^{2+q}_{\beta+q}(\mathbb{K}; q)\|^2 + \gamma^2 \|v; H^{1+q}_{\beta+q}(\mathbb{K}; p)\|^2 \leqslant c\{\mathcal{L}(D_y, \zeta, \tau)v\}_{q,\beta}(\mathbb{K}; p, \gamma)^2, \quad (2.16)$$

где $q = 0, 1, \ldots$, *а постоянная* c *не зависит ни от* v, *ни от параметров.*

Доказательство. Для $q = 0$ формула (2.16) совпадает с оценкой (1.23) из предложения 1.3. Допустим, что для $q \leqslant q_0$ неравенство (2.16) установлено, и покажем, что тогда оно верно и при $q = q_0 + 1$.

В силу леммы 2.7 достаточно оценить последнее слагаемое справа в (2.14) при $q = q_0 + 1$, т.е. величину

$$\|\psi_{\infty,p} v; H^{2+q_0}_{\beta+q_0}(\mathbb{K}; p)\|^2 = \|\psi_{\infty,p} v; H^{2+q_0}_{\beta+q_0}(\mathbb{K})\|^2 + p^2 \|\psi_{\infty,p} v; H^{1+q_0}_{\beta+q_0}(\mathbb{K}; p)\|^2. \quad (2.17)$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(D_y, O)\psi_{\infty,p} v \\ &\quad = \psi_{\infty,p}\mathcal{L}(D_y, \zeta, \tau)v + [\mathcal{L}(D_y, \zeta, \tau), \psi_{\infty,p}]v \\ &\quad\quad + (\mathcal{L}(D_y, O) - \mathcal{L}(D_y, \zeta, \tau))\psi_{\infty,p} v. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Известно, что уравнение

$$\mathcal{L}(D_y, O)v = f \in H^{q_0}_{\beta+q_0}(\mathbb{K})$$

имеет единственное решение $v \in H^{2+q_0}_{\beta+q_0}(\mathbb{K})$, удовлетворяющее условию $v \mid \partial\mathbb{K} = 0$; для этого решения верна оценка

$$\|v; H^{2+q_0}_{\beta+q_0}(\mathbb{K})\| \leqslant c\|f; H^{q_0}_{\beta+q_0}(\mathbb{K})\| \tag{2.19}$$

(см. [10] или [13]). Нормы в $H^{q_0}_{\beta+q_0}(\mathbb{K})$ второго и третьего слагаемых из правой части (2.18) не превосходят $cp\|v; H^{1+q_0}_{\beta+q_0}(\mathbb{K};p)\|$. Поэтому из (2.17)–(2.19) вытекает неравенство

$$\|\psi_{\infty,p}v; H^{2+q_0}_{\beta+q_0}(\mathbb{K})\|^2 \leqslant c(\|\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)u; H^{q_0}_{\beta+q_0}(\mathbb{K})\|^2 + p^2\|v; H^{1+q_0}_{\beta+q_0}(\mathbb{K};p)\|^2).$$

Последнее слагаемое уже оценивалось на предыдущем шаге индукции (см. (2.16) при $q = q_0$):

$$\|v; H^{1+q_0}_{\beta+q_0}(\mathbb{K};p)\| \leqslant \frac{p}{\gamma}\{\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v\}_{q_0,\beta}(\mathbb{K};p,\gamma).$$

Остается заметить, что

$$p^2/\gamma^2\{f\}^2_{q,\beta} + \|f; H^{q+1}_{\beta+q+1}(\mathbb{K};p)\|^2 = \{f\}^2_{q+1,\beta}. \quad \bullet$$

§3. Априорные оценки решений в конусе с неоднородным краевым условием

Здесь обсуждаются системы, эллиптическая часть которых подчинена условию еще более строгому, чем сильная эллиптичность. В частности, для скалярных уравнений (второго порядка) это не приводит к дополнительным ограничениям, а система Ламе теории упругости с коэффициентами λ и μ удовлетворяет упомянутому условию лишь при $\mu > \lambda$.

Будем рассматривать выражение

$$(\mathcal{L}(D_x,D_t)u)_\alpha = \partial_t^2 u_\alpha - a^{ij}_{\alpha\beta}\partial_i\partial_j u_\beta, \tag{3.1}$$

подразумевая суммирование по повторяющимся индексам, причем α, $\beta = 1,\dots,k$; $i,j = 1,\dots,n$; $u = (u_1,\dots,u_k)$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$, а коэффициенты $a^{ij}_{\alpha\beta}$ постоянные и вещественные. Удобно положить $t = x_{n+1}$ и писать $(\mathcal{L}u)_\alpha = g^{ij}_{\alpha\beta}\partial_i\partial_j u_\beta$. Предполагается, что

$$g^{ij}_{\alpha\beta} = g^{ji}_{\alpha\beta}, \quad g^{ij}_{\alpha\beta} = g^{ij}_{\beta\alpha}. \tag{3.2}$$

Теперь введем условие, о котором шла речь в начале раздела: для любых векторов $\zeta^j \in \mathbb{R}^k$, $\zeta^j = (\zeta_1^j, \dots, \zeta_k^j)$, $j = 1, \dots, n$, имеет место неравенство

$$a_{\alpha\beta}^{ij} \zeta_\alpha^i \zeta_\beta^j \geqslant \rho_0^2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{k} (\zeta_\alpha^j)^2 \tag{3.3}$$

с постоянной $\rho_0 > 0$.

Ясно, что при $\zeta_\alpha^j = \xi^j \eta_\alpha$ из условия (3.3) вытекает неравенство (1.7), т. е. сильная эллиптичность. Обратное неверно: сильная эллиптичность не обеспечивает справедливости неравенства (3.3) (мы обсудим это позже в связи с уравнениями Ламе).

1. Энергетические оценки. Сначала займемся оператором (3.1) в цилиндре $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$, где, как и прежде, $\mathbb{D} = \mathbb{K} \times \mathbb{R}^d$. Следующее рассуждение, приводящее к лемме 3.1, по существу содержится в [9] (для скалярного уравнения второго порядка).

Преобразуем выражение

$$f^s \partial_s u_\alpha (\mathcal{L}u)_\alpha = f^s \partial_s u_\alpha g_{\alpha\beta}^{ij} \partial_i \partial_j u_\beta;$$

выбор постоянного вектора $f = (f^1, \dots, f^{n+1})$ уточним позже. Имеем

$$\begin{aligned}
&\partial_s (g_{\alpha\beta}^{ij} \partial_i u_\alpha \partial_j u_\beta) \\
&\quad = g_{\alpha\beta}^{ij} \partial_s \partial_i u_\alpha \partial_j u_\beta + g_{\alpha\beta}^{ij} \partial_i u_\alpha \partial_s \partial_j u_\beta \\
&\quad = 2 g_{\alpha\beta}^{ij} \partial_s \partial_i u_\alpha \partial_j u_\beta \\
&\quad = 2 g_{\alpha\beta}^{ij} \partial_i (\partial_s u_\alpha \partial_j u_\beta) - 2 g_{\alpha\beta}^{ij} \partial_s u_\alpha \partial_i \partial_j u_\beta.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&2 f^s \partial_s u_\alpha (\mathcal{L}u)_\alpha \\
&\quad = 2 f^s \partial_i (g_{\alpha\beta}^{ij} \partial_s u_\alpha \partial_j u_\beta) - f^s \partial_s (g_{\alpha\beta}^{ij} \partial_i u_\alpha \partial_j u_\beta) \\
&\quad = 2 f^i \partial_s (g_{\alpha\beta}^{sj} \partial_i u_\alpha \partial_j u_\beta) - f^s \partial_s (g_{\alpha\beta}^{ij} \partial_i u_\alpha \partial_j u_\beta).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Пусть $G = (G^{mi})$ — диагональная $(n+1)\times(n+1)$-матрица $\operatorname{diag}(-\rho^2, \dots, -\rho^2, 1)$, где $0 < \rho < \rho_0$ и ρ_0 — число из условия (3.3). Положим $f^s = G^{si} f_i$ и перепишем формулу (3.4) в виде

$$\begin{aligned}
&2f^s \partial_s u_\alpha (\mathcal{L}u)_\alpha \\
&\quad = 2f_m G^{mi} \partial_s (g^{sj}_{\alpha\beta} \partial_i u_\alpha \partial_j u_\beta) - f_m G^{ms} \partial_s (g^{ij}_{\alpha\beta} \partial_i u_\alpha \partial_j u_\beta) \\
&\quad = \partial_s (2G^{mi} f_m \partial_i u_\alpha g^{sj}_{\alpha\beta} \partial_j u_\beta - G^{ms} f_m g^{ij}_{\alpha\beta} \partial_i u_\alpha \partial_j u_\beta).
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает

Лемма 3.1. *Для всех вектор-функций* $u = (u_1, \dots, u_k) \in C^2(\mathbb{D}\times\mathbb{R})$ *справедливо тождество*

$$\begin{aligned}
&\partial_s \{ e^{-2\gamma t} (2G^{mi} f_m \partial_i u_\alpha g^{sj}_{\alpha\beta} \partial_j u_\beta - G^{ms} f_m g^{ij}_{\alpha\beta} \partial_i u_\alpha \partial_j u_\beta) \} \\
&+ 2\gamma e^{-2\gamma t} (2G^{mi} f_m \partial_i u_\alpha g^{sj}_{\alpha\beta} \partial_j u_\beta \partial_s t - G^{ms} f_m \partial_s t g^{ij}_{\alpha\beta} \partial_i u_\alpha \partial_j u_\beta) \\
&\quad = 2e^{-2\gamma t} f^s \partial_s u_\alpha (\mathcal{L}u)_\alpha.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Выберем теперь вектор $f = (f_1, \dots, f_{n+1})$ так, чтобы выполнялись условия:

1) $G(f,f) > 0$ и $f_{n+1} > 0$ (напомним, что $G(x,y) = -\rho^2(x_1y_1 + \dots + x_ny_n) + x_{n+1}y_{n+1}$); иными словами, вектор f времениподобен относительно G и направлен в будущее.

2) $f_1\nu_1 + \dots + f_{n-d}\nu_{n-d} > 0$ для всех внешних нормалей $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{n-d})$ к $\partial\mathbb{K}$.

Условие 2 не для любого конуса выполнимо. Если, например, $\mathbb{K}$ — угол раствора α на плоскости, то при $\alpha = 2\pi$ нужного вектора не существует. Если же $\alpha < \pi$, то в качестве f можно взять любой вектор (подчиненный условию 1), проекция которого на плоскость направлена внутрь угла, вертикального для $\mathbb{K}$.

Интегрирование тождества (3.5) по множеству $\mathbb{D}\times\{t<T\}$ приводит к формуле

$$\begin{aligned}
&\Bigg(\int\limits_{\partial\mathbb{D}\times\{t<T\}} + \int\limits_{\mathbb{D}\times\{t=T\}} \Bigg) e^{-2\gamma t} (2G^{mi} f_m \partial_i u_\alpha g^{sj}_{\alpha\beta} \partial_j u_\beta \nu_s - G^{ms} f_m \nu_s g^{ij}_{\alpha\beta} \partial_i u_\alpha \partial_j u_\beta) dS \\
&+ 2\gamma \int\limits_{\mathbb{D}\times\{t<T\}} e^{-2\gamma t} (2G^{mi} f_m \partial_i u_\alpha g^{sj}_{\alpha\beta} \partial_j u_\beta \partial_s t - G^{ms} f_m \partial_s t g^{ij}_{\alpha\beta} \partial_i u_\alpha \partial_j u_\beta) dx dt \\
&\quad = 2 \int\limits_{\mathbb{D}\times\{t<T\}} e^{-2\gamma t} f^s \partial_s u_\alpha (\mathcal{L}u)_\alpha dx dt,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

где ν_s — компоненты внешней нормали. Заметим, что выражение в скобках под первыми двумя интегралами равно

$$2G(f, \nabla u_\alpha) g_{\alpha\beta}(\nabla u_\beta, \nu) - G(f, \nu) g_{\alpha\beta}(\nabla u_\alpha, \nabla u_\beta) = G(f, \eta), \tag{3.7}$$

где

$$\eta = 2g_{\alpha\beta}(\nabla u_\beta, \nu)\nabla u_\alpha - g_{\alpha\beta}(\nabla u_\alpha, \nabla u_\beta)\nu. \tag{3.8}$$

В интеграле по множеству $\mathbb{D} \times \{t = T\}$ фигурирует вектор $\nu = (0, \dots, 0, 1)$; поскольку $(\partial_1 t, \dots, \partial_{n+1} t) = (0, \dots, 0, 1)$, то и подынтегральное выражение в объемном интеграле слева записывается в виде $e^{-\gamma t} G(f, \eta)$ с тем же вектором η.

Покажем, что форма $\nabla u \mapsto G(f, \eta)$ положительно определенная. Учтем, что при $\nu = (0, \dots, 0, 1)$ неравенство $G(f, \eta) > 0$ вытекает из соотношений $G(\eta, \eta) > 0$ и $G(\eta, \nu) > 0$ (ср. с леммой 24.1.2 в [9]). В самом деле, неравенство $G(\eta, \eta) > 0$ означает, что вектор η времениподобен относительно G, а в силу $G(\eta, \nu) > 0$ этот вектор направлен в будущее. Так как теми же двумя свойствами обладает и вектор f (условие 1), то $G(f, \eta) > 0$. Проверке неравенств $G(\eta, \eta) > 0$ и $G(\eta, \nu) > 0$ посвящена следующая лемма.

Лемма 3.2. *Пусть выполнено условие* (3.3), $\nu = (0, \dots, 0, 1)$ *и вектор* η *задан формулой* (3.8). *Тогда* $G(\eta, \eta) > 0$ *и* $G(\eta, \nu) > 0$.

Доказательство. Введем обозначения: $\zeta_\alpha = \nabla u_\alpha$, $s = g_{\alpha\beta}(\zeta_\alpha, \zeta_\beta)$, $\theta = g_{\alpha\beta}(\zeta_\beta, \nu)\zeta_\alpha$ и $p(s) = G(\eta, \eta) = G(2\theta - s\nu, 2\theta - s\nu) = s^2 - 4G(\theta, \nu)s + 4G(\theta, \theta)$ (напомним, что $G(\nu, \nu) = 1$). Левый корень полинома $s \mapsto p(s)$ есть $s_l = 2G(\theta, \nu) - \sqrt{\mathcal{D}}/2$, где $\mathcal{D}/16 = G(\theta, \nu)^2 - G(\theta, \theta) = \rho^2(\theta_1^2 + \dots + \theta_n^2) \geqslant 0$.

Убедимся в том, что $s < s_l$, и потому $p(s) > 0$. Так как $g_{\alpha\beta}^{i(n+1)} = 0$ при $i \neq n+1$ и при $i = n+1$, $\alpha \neq \beta$, то

$$\begin{aligned} s = g_{\alpha\beta}(\zeta_\alpha, \zeta_\beta) &= \sum_{\alpha=1}^{k} g_{\alpha\alpha}^{(n+1)(n+1)} \zeta_\alpha^{n+1} \zeta_\alpha^{n+1} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1,\dots,k \\ i,j=1,\dots,n}} g_{\alpha\beta}^{ij} \zeta_\alpha^i \zeta_\beta^j \\ &= \sum_{\alpha=1}^{k} (\zeta_\alpha^{n+1})^2 - a_{\alpha\beta}^{ij} \zeta_\alpha^i \zeta_\beta^j \end{aligned} \tag{3.9}$$

(см. (3.1)). Далее,

$$\theta = g_{\alpha\beta}(\zeta_\beta, \nu)\zeta_\alpha = g^{ij}_{\alpha\beta}\zeta^i_\beta \nu_j \zeta_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{k} g^{(n+1)(n+1)}_{\alpha\alpha} \zeta^{n+1}_\alpha \zeta_\alpha$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{k} \zeta^{n+1}_\alpha \zeta_\alpha.$$

Значит,

$$s_l = 2(\theta_{n+1} - \rho(\theta_1^2 + \cdots + \theta_n^2)^{1/2})$$
$$= 2\Bigg(\sum_{\alpha=1}^{k} (\zeta^{n+1}_\alpha)^2 - \rho\Bigg(\sum_{q=1}^{n} \Bigg(\sum_{\alpha=1}^{k} \zeta^{n+1}_\alpha \zeta^q_\alpha \Bigg)^2 \Bigg)^{1/2} \Bigg)$$
$$\geqslant 2\Bigg(\sum_{\alpha=1}^{k} (\zeta^{n+1}_\alpha)^2 - \rho\Bigg(\sum_{q=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{k} (\zeta^{n+1}_\alpha)^2 \sum_{\beta=1}^{k} (\zeta^q_\beta)^2 \Bigg)^{1/2} \Bigg)$$
$$= 2\Bigg(\tau^2 - \tau\rho\Bigg(\sum_{q=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{k} (\zeta^q_\alpha)^2 \Bigg)^{1/2} \Bigg),$$

где $\tau^2 = \sum\limits_{\alpha} (\zeta^{n+1}_\alpha)^2$. Теперь из (3.9) следует, что $s < s_l$, если

$$\tau^2 - 2\rho\tau\Bigg(\sum_{q,\alpha} (\zeta^q_\alpha)^2 \Bigg)^{1/2} + a^{ij}_{\alpha\beta}\zeta^i_\alpha\zeta^j_\beta > 0.$$

Дискриминант Δ этого трехчлена равен $4(\rho^2 \sum (\zeta^q_\alpha)^2 - a^{ij}_{\alpha\beta}\zeta^i_\alpha\zeta^j_\beta)$. Согласно (3.3), имеем $\Delta < 0$ и $G(\eta, \eta) > 0$.

Рассмотрим $G(\eta, \nu) = G(2\theta - s\nu, \nu) = 2G(\theta, \nu) - s$. Поскольку $s < s_l = 2G(\theta, \nu) - 2\rho(\theta_1^2 + \cdots + \theta_n^2)^{1/2}$, то $s < 2G(\theta, \nu)$ и $G(\eta, \nu) > 0$. •

Эта лемма и приведенное перед ее формулировкой рассуждение о положительной определенности формы (3.7) оправдывают следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Пусть выполняется неравенство* (3.3), *а вектор* $f = (f_1, \dots, f_{n+1})$ *таков, что* $G(f,f) > 0$ *и* $f_{n+1} > 0$. *Тогда справедливы оценки*

$$\int\limits_{\mathbb{D}\times\{t=T\}} \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} |\partial_j u_\alpha|^2 ds \leqslant c \int\limits_{\mathbb{D}\times\{t=T\}} G(f,\eta)dS,$$

$$\int\limits_{\mathbb{D}\times\{t<T\}} e^{-2\gamma t}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} |\partial_j u_\alpha|^2 dxdt \leqslant c \int\limits_{\mathbb{D}\times\{t<T\}} e^{-2\gamma t} G(f,\eta)dxdt,$$

где форма $G(f,\eta)$ *и вектор* η *заданы равенствами* (3.7) *и* (3.8) *с вектором* $\nu = (0,\dots,0,1)$.

Обратимся к оценке интеграла по множеству $\partial\mathbb{D} \times \{t < T\}$ в (3.6). Подынтегральное выражение равно форме (3.7), где ν — внешняя нормаль к $\partial\mathbb{D}$. Положим, $\nabla u_\alpha = \xi_\alpha + t_\alpha \nu$, считая, что векторы ξ_α и ν ортогональны и $t_\alpha \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\begin{aligned}
&2G(f,\xi_\alpha + t_\alpha\nu)g_{\alpha\beta}(\xi_\beta + t_\beta\nu, \nu) - G(f,\nu)g_{\alpha\beta}(\xi_\alpha + t_\alpha\nu, \xi_\beta + t_\beta\nu) \\
&\quad = G(f,\nu)g_{\alpha\beta}(\nu,\nu)t_\alpha t_\beta + 2G(f,\xi_\alpha)g_{\alpha\beta}(\nu,\nu)t_\beta \\
&\qquad + 2G(f,\xi_\alpha)g_{\alpha\beta}(\xi_\beta,\nu) - G(f,\nu)g_{\alpha\beta}(\xi_\alpha,\xi_\beta).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Ввиду условия (3.3)

$$g_{\alpha\beta}(\nu,\nu)t_\alpha t_\beta = -a^{ij}_{\alpha\beta}\nu_i\nu_j t_\alpha t_\beta \leqslant -\rho_0^2 \sum_{\alpha=1}^{k} t_\alpha^2$$

(здесь используется вытекающая из (3.3) сильная эллиптичность не зависящей от D_t части оператора $\mathcal{L}(D_x, D_t)$. Кроме того, $G(f,\nu) < 0$ по выбору вектора f — условие 2). Поэтому

$$G(f,\nu)g_{\alpha\beta}(\nu,\nu)t_\alpha t_\beta \geqslant |G(f,\nu)|\rho_0^2 \sum_{\alpha=1}^{k} t_\alpha^2. \tag{3.11}$$

Далее,

$$|2G(f,\xi_\alpha)g_{\alpha\beta}(\nu,\nu)t_\beta| \leqslant c_\varepsilon \sum_{\alpha,\beta} G(f,\xi_\alpha)^2 g_{\alpha\beta}(\nu,\nu)^2 + \varepsilon \sum_{\alpha} t_\alpha^2. \tag{3.12}$$

Сопоставляя (3.10)–(3.12), приходим к выводу, что справедлива

Лемма 3.4. *Пусть вектор f таков, что $G(f,\nu) < 0$, где ν — нормаль к $\partial\mathbb{D}$. Тогда*

$$\int\limits_{\partial\mathbb{D}\times\{t<T\}} e^{-2\gamma t}\sum_{\alpha=1}^{k}|\nabla_\nu u_\alpha|^2 dS$$
$$\leqslant c\Bigg\{\int\limits_{\partial\mathbb{D}\times\{t<T\}} e^{-2\gamma t}G(f,\eta)dS + \int\limits_{\partial\mathbb{D}\times\{t<T\}} e^{-2\gamma t}\sum_{\alpha=1}^{k}|\nabla_\tau u_\alpha|^2 dS\Bigg\},$$

причем $\nabla_\tau u_\alpha$ и $\nabla_\nu u_\alpha$ — касательная и нормальная составляющие градиента ∇u_α.

Теперь мы готовы установить оценку, которой передается роль, сыгранная в §1 неравенством (1.15). Пусть $\mathcal{D}_\beta$ — линеал, натянутый на множество $C_c^\infty(\overline{\mathbb{K}}\setminus 0)$ и функции вида $\mathbb{K}\ni y\mapsto \chi(y)v_{q,j}(y)$; здесь $v_{q,j}$ определяются формулой (1.22), в качестве λ_0 может фигурировать любое собственное число пучка, подчиненное условию $2\operatorname{Im}\lambda_0 < 2\beta + (n-d) - 4$, а $\chi\in C_c^\infty(\overline{\mathbb{K}})$, причем $\chi = 1$ вблизи вершины конуса. (Иначе говоря, $\mathcal{D}_\beta$ отличается от линеала $\mathring{\mathcal{D}}_\beta$, введенного в §1.4, лишь тем, что элементы из $\mathcal{D}_\beta$ не обязаны аннулироваться на границе конуса).

Определим пространства $H^s_\beta(\partial\mathbb{K})$ и $H^s_\beta(\partial\mathbb{K};q)$ при $s = 0,1,\dots$ и $\beta\in\mathbb{R}$. Для этого перепишем норму (1.1) в эквивалентной форме

$$\Bigg(\int\limits_0^\infty\sum_{k=0}^{s}\|(r\partial_r)u(r,\cdot);H^{s-k}(\Omega)\|^2 r^{2(\beta-s)+n-d-1}dr\Bigg)^{1/2},$$

где $r = |y|$. В пространстве $H^s_\beta(\partial\mathbb{K})$ норму можно положить равной последнему выражению с заменой n на $n-1$ и Ω на $\partial\Omega$,

$$\|u;H^s_\beta(\partial\mathbb{K})\| = \Bigg(\int\limits_0^\infty\sum_{k=0}^{s}\|(r\partial_r)^k u(r,\cdot);H^{s-k}(\partial\Omega)\|^2 r^{2(\beta-s)+n-d-2}dr\Bigg)^{1/2}. \quad (3.13)$$

Теперь так же, как в (1.2), введем норму с параметром

$$\|u;H^s_\beta(\partial\mathbb{K};q)\| = \Bigg(\sum_{k=0}^{s} q^{2k}\|u;H^{s-k}_\beta(\partial\mathbb{K})\|^2\Bigg)^{1/2}.$$

Предложение 3.5. *Допустим, что выполнены следующие условия:* 1) *существует такой постоянный вектор* $(f_1, \dots, f_{n-d})$, *что* $f_1\nu_1 + \dots + f_{n-d}\nu_{n-d} > 0$ *для всех внешних нормалей* $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{n-d})$ *к* $\partial\mathbb{K}$; 2) *полоса* $(n-d)-3 \leqslant 2\operatorname{Im}\lambda \leqslant (n-d)-2$ *свободна от спектра пучка* $\mathfrak{A}$; 3) *справедливо неравенство* (3.3). *Тогда для всех* $v \in \mathcal{D}_1$ *имеет место оценка*

$$\gamma^2\|v; H_0^1(\mathbb{K}; p)\|^2 + \gamma\|D_\nu v; L_2(\partial\mathbb{K})\|^2 \\ \leqslant c\{\|\mathcal{L}(D_y, \zeta, \tau)v; L_2(\mathbb{K})\|^2 + \gamma\|v; H_0^1(\partial\mathbb{K}; p)\|^2\}, \tag{3.14}$$

причем постоянная c *не зависит ни от* v, *ни от параметров* $\zeta \in \mathbb{R}^d$ *и* $\tau = \sigma - i\gamma$, *где* $\sigma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$.

Замечание 3.6. Первое условие, нужное для леммы 3.4, уже обсуждалось (после формулы (3.6)). Вторым условием обеспечивается сходимость интегралов по $\partial\mathbb{K}$ в (3.14) для всякой функции из $\mathcal{D}_1$. При разумных ограничениях на конус $\mathbb{K}$ ($\Omega = \mathbb{K} \cap S^{n-d-1}$ является областью с гладкой границей на сфере S^{n-d-1}, а граница конуса может быть задана уравнением вида $z_{n-d} = \psi(z_1, \dots, z_{n-d-1})$ с однородной функцией ψ) это условие выполняется автоматически (см. [16]). Если $\mathbb{K}$ — угол раствора 2π на плоскости, а пучок $\mathfrak{A}$ порожден оператором Лапласа, то условие 2 нарушено (имеется собственное число $\lambda = -i/2$).

Доказательство предложения 3.5. Рассмотрим множество функций вида $u(y, z, t) = \psi(z, t)v(y)$, где $v \in \mathcal{D}_1$, $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$. Для таких функций справедливы леммы 3.1, 3.3 и 3.4 (подчеркнем, что $\mathcal{L}(D_x, D_t)u \in L_2(\mathbb{D} \times \mathbb{R})$). Сначала получим „энергетическую“ оценку для функций u.

Вернемся к формуле (3.6). Первый интеграл из левой части оценивается снизу в лемме 3.4, а второй и третий — в лемме 3.3. Правая часть (3.6) по абсолютной величине не больше, чем

$$2 \int\limits_{\mathbb{D}\times\{t<T\}} e^{-\gamma t}|f^s\partial_s u||e^{-\gamma t}\mathcal{L}u|\,dx\,dt \\ \leqslant c\Big\{\varepsilon\gamma \int\limits_{\mathbb{D}\times\{t<T\}} e^{-2\gamma t}|\nabla u|^2 dx\,dt + (\varepsilon\gamma)^{-1} \int\limits_{\mathbb{D}\times\{t<T\}} e^{-2\gamma t}|\mathcal{L}u|^2 dx\,dt\Big\}.$$

Учитывая все указанные соотношения, приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
&\gamma \int\limits_{\mathbb{D}\times\{t=T\}} e^{-2\gamma t}|\nabla u|^2 dS \\
&+\gamma^2 \int\limits_{\mathbb{D}\times\{t<T\}} e^{-2\gamma t}|\nabla u|^2 dx dt + \gamma \int\limits_{\partial\mathbb{D}\times\{t<T\}} e^{-2\gamma t}|\nabla_\nu u|^2 dS \\
&\qquad \leqslant c\Bigg\{ \int\limits_{\mathbb{D}\times\{t<T\}} e^{-2\gamma t}|\mathcal{L}u|^2 dx dt + \gamma \int\limits_{\partial\mathbb{D}\times\{t<T\}} e^{-2\gamma t}|\nabla_\tau u|^2 dS\Bigg\},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

в котором постоянная c не зависит ни от T, ни от других параметров. Перейдем к пределу при $T \to +\infty$, применим преобразование Фурье $F_{(z,t)\to(\zeta,\tau)}$ и вспомним, что $u(y,z,t) = \psi(z,t)v(y)$. Благодаря произволу в выборе ψ получаем

$$\begin{aligned}
&\gamma^2(\|\nabla v\|^2 + p^2\|v\|^2) + \gamma\langle D_\nu v\rangle^2 \\
&\qquad \leqslant c\{\|\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v\|^2 + \gamma(\langle\nabla_\tau v\rangle^2 + p^2\langle v\rangle^2),
\end{aligned} \tag{3.16}$$

где $\|\cdot\|$ и $\langle\cdot\rangle$ — нормы в $L_2(\mathbb{K})$ и $L_2(\partial\mathbb{K})$ соответственно.

В случае $n-d>2$ воспользуемся неравенством Харди

$$\int\limits_0^\infty |w(r)|^2 r^{n-d-3} dr \leqslant \frac{4}{(n-d-2)^2}\int\limits_0^\infty |\partial_r w(r)|^2 r^{n-d-1} dr,$$

из которого следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{K}} |v(y)|^2|y|^{-2} dy \leqslant c\int\limits_{\mathbb{K}} |\nabla v(y)|^2 dy.$$

Вместе с (3.16) это приводит к оценке (3.14).

Случай $n-d=2$ рассматривается с помощью приемов из §4; поэтому окончание доказательства перенесено в добавление. Сейчас отметим лишь, что при условии $v \mid \partial\mathbb{K} = 0$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{K}} |\nabla v|^2 dy \geqslant \int\limits_{\mathbb{K}} |\partial_\omega v|^2 d\omega\frac{dr}{r} \geqslant c\int\limits_{\mathbb{K}} |v|^2 d\omega\frac{dr}{r} = c\int\limits_{\mathbb{K}} |v|^2 r^{-2} dy,$$

где $r = |y|$. Теперь из (3.16) снова следует неравенство (3.14). •

Замечание 3.7. Для уравнений Ламе теории упругости условие (3.3) выполняется, только если коэффициенты Ламе связаны соотношением $\mu > \lambda$. Запишем оператор Ламе в виде $\operatorname{grad}\operatorname{div} u + p\Delta u$, где $p = \mu/(\mu+\lambda)$, и проверим наше утверждение, считая для простоты, что $u = (u_1, u_2)$, а число независимых переменных равно 2 (в трехмерном случае результат такой же). Матрица формы из левой части (3.3) имеет вид (T_{ij}), где 2×2-блоки T_{ij} $(i,j = 1,2)$ заданы равенствами

$$T_{11} = \begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}, \qquad T_{22} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}, \qquad T_{12} = T_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Миноры из критерия Сильвестра положительной определенности таковы: $\Delta_1 = 1+p$, $\Delta_2 = p(1+p)$, $\Delta_3 = (1+p)(p^2 - 1/4)$, $\Delta_4 = (1+p-(4(p+1))^{-1})\Delta_3$. Все они оказываются положительными для $p > 1/2$, т.е. для $\mu > \lambda$.

2. Комбинированная оценка. Здесь мы применим такой же прием, как и в §1.4 (разбиение конуса на зоны и т. д.). Изменение состоит в том, что роль оценки (1.15) передается неравенству (3.14).

Обозначим через $H_\beta^{s-1/2}(\partial\mathbb{K}; p)$ пространство следов на $\partial\mathbb{K}$ функций из $H_\beta^s(\mathbb{K}; p)$, $s = 1, 2, \dots, \beta \in \mathbb{R}$.

Предложение 3.8. *Пусть выполнены условия предложения 3.5. Пусть, кроме того, $\beta \leqslant 1$ и прямая $\operatorname{Im}\lambda = \beta + (n-d)/2 - 2$ не содержит точек спектра пучка $\mathfrak{A}$. Тогда для всех $v \in \mathcal{D}_\beta$ справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} &\|\chi_p v; H_\beta^2(\mathbb{K}; p)\|^2 + \gamma^2 \|v; H_\beta^1(\mathbb{K}; p)\|^2 + \gamma \|D_\nu v; H_\beta^0(\partial\mathbb{K})\|^2 \\ &\quad\leqslant c\{\|f; H_\beta^0(\mathbb{K})\|^2 + \|\chi_p v; H_\beta^{3/2}(\partial\mathbb{K}; p)\|^2 + \gamma\|v; H_0^1(\partial\mathbb{K}; p)\|^2 \\ &\qquad + (p^{2(1-\beta)}/\gamma^2)\|f; L_2(\mathbb{K})\|^2 + (p^{2(1-\beta)}/\gamma)\|v; H_0^1(\partial\mathbb{K}; p)\|^2\}; \end{aligned} \tag{3.17}$$

здесь $f = \mathcal{L}(D_y, \zeta, \tau)v$, $\chi_p(y) = \chi(py)$, $\chi \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{K}})$, причем $\chi = 1$ вблизи вершины конуса. Постоянная c в (3.17) не зависит ни от v, ни от параметров $\zeta \in \mathbb{R}^d$, $\tau = \sigma - i\gamma$, где $\sigma \in \mathbb{R}$ и $\gamma > 0$.

Доказательство. Будем следовать схеме доказательства предложения 1.3.

Поскольку прямая $\operatorname{Im}\lambda = \beta+(n-d)/2-2$ свободна от спектра пучка $\mathfrak{A}$, имеет место „эллиптическая“ оценка в окрестности вершины конуса:

$$\begin{aligned}
&\|\chi U; H^2_\beta(\mathbb{K};1)\| \\
&\quad \leqslant c\{\|\chi\mathcal{L}(D_\eta,\theta)U; H^0_\beta(\mathbb{K})\|^2 \\
&\qquad + \|\chi U; H^{3/2}_\beta(\partial\mathbb{K};1)\|^2 + \|\psi U; H^1_\beta(\mathbb{K};1)\|^2\},
\end{aligned} \tag{3.18}$$

где $\psi\in C^\infty_c(\overline{\mathbb{K}})$, $\chi\psi=\chi$, U — любая функция из $H^2_\beta(\mathbb{K},1)$ (см. [10, 13]).

Роль основной локальной оценки вне вершины конуса теперь играет неравенство

$$\begin{aligned}
&\gamma^2\|\varkappa U; H^1(\mathbb{K};p)\|^2 + \gamma\|D_\nu\varkappa U; L_2(\partial\mathbb{K})\|^2 \\
&\quad \leqslant c\{\|\varkappa\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)U; L_2(\mathbb{K})\|^2 \\
&\qquad + \gamma\|\varkappa U; H^1(\partial\mathbb{K};p)\|^2 + \|\psi U; H^1(\mathbb{K};p)\|^2\}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

(вместо неравенства (1.27) в §1); формула (3.19) выводится из (3.14) так же, как (1.27) из (1.15). Повторяя с очевидными изменениями переход от оценки (1.27) к неравенству (1.26), из (3.19) получаем

$$\begin{aligned}
&(\gamma/p)^2\|\varkappa_\infty U; H^1_\beta(\mathbb{K};1)\|^2 + (\gamma/p)\|D_\nu(\varkappa_\infty U); H^0_\beta(\partial\mathbb{K})\|^2 \\
&\quad \leqslant c\{\|\varkappa_\infty\mathcal{L}(D_\eta,\theta)U; H^0_\beta(\mathbb{K};1)\|^2 \\
&\qquad + (\gamma/p)\|\varkappa_\infty U; H^1_\beta(\partial\mathbb{K};1)\|^2 + \|\psi_\infty U; H^1_{\beta-1}(\mathbb{K};1)\|^2\}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Сложим неравенства (3.18) и (3.20), отбросим теперь ненужную срезку $\varkappa_\infty$ и заменим в так возникшем неравенстве переменные: $\eta\mapsto y=p^{-1}\eta$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\|\chi_p v; H^2_\beta(\mathbb{K};p)\|^2 + \gamma^2\|v; H^1_\beta(\mathbb{K};p)\|^2 + \gamma\|D_\nu v; H^0_\beta(\partial\mathbb{K})\|^2 \\
&\quad \leqslant c\{\|\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v; H^0_\beta(\mathbb{K})\|^2 + \|\chi_p v; H^{3/2}_\beta(\partial\mathbb{K};p)\|^2 \\
&\qquad + \gamma\|v; H^1_\beta(\partial\mathbb{K};p)\|^2 + \|\psi_{\infty,p} v; H^1_{\beta-1}(\mathbb{K};p)\|^2\},
\end{aligned} \tag{3.21}$$

где $\chi_p(y)=\chi(py)$, $\psi_{\infty,p}(y)=\psi_\infty(py)$, $v(y)=U(py)$ (ср. (1.29)). Как и в доказательстве предложения 1.3, замечаем, что

$$\|\psi_{\infty,p}v; H^1_{\beta-1}(\mathbb{K};p)\|^2 \leqslant cp^{2(1-\beta)}\int_{\mathbb{K}}\{|\nabla v|^2 + (|y|^{-2}+p^2)|v|^2\}dy.$$

Для оценки последнего интеграла воспользуемся предложением 3.5. В силу (3.14) получаем

$$\|\psi_{\infty,p}v; H^1_{\beta-1}(\mathbb{K};p)\|^2 \\ \leqslant c\{(p^{2(1-\beta)}/\gamma^2)\|\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v; L_2(\mathbb{K})\|^2 + (p^{2(1-\beta)}/\gamma)\|v; H^1_0(\partial\mathbb{K};p)\|^2\}. \quad \bullet$$

Далее мы подробно развиваем теорию задач с однородным краевым условием, основанную на оценках из §1,2. Теория, связанная с неравенствами вида (3.17), может быть построена „параллельно“, и здесь мы в основном ограничиваемся формулировками.

§4. Оператор краевой задачи в конусе. Существование и единственность решений

С краевой задачей (1.10), (1.11) в конусе $\mathbb{K}$ связывается неограниченный замкнутый оператор $A(\zeta,\tau)$, действующий в пространствах, подсказанных оценкой (1.15). Доказывается, что этот оператор имеет тривиальное ядро и область значений, совпадающую с $L_2(\mathbb{K})$. Этим доставляются существование и единственность „сильного“ решения задачи (1.10), (1.11). Использованная здесь схема рассуждений и полученные результаты применяются в §5 для изучения краевой задачи в шкале весовых пространств, связанных с комбинированными оценками.

1. Оператор $A(\zeta,\tau)$. Введем неограниченный оператор $A(\zeta,\tau)$ в $L_2(\mathbb{K})$, заданный на $\mathring{\mathcal{D}}_1$,

$$\mathring{\mathcal{D}}_1 \ni v \mapsto A(\zeta,\tau)v := \mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v.$$

(Множества $/\mathring{\mathcal{D}}_\beta$ определены в начале раздела 1.4). Этот оператор допускает замыкание. Действительно, пусть $\{v_n\} \subset \mathring{\mathcal{D}}_1$, $v_n \to 0$ и $A(\zeta,\tau)v_n \to f$ (сходимость в $L_2(\mathbb{K})$). Так как $(\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v_n, w) = (v_n, \mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)^*w)$ для всякой функции $w \in C_c^\infty(\mathbb{K})$ (двойственность в $L_2(\mathbb{K})$), то $(f,w)=0$ и $f=0$. Замыкание оператора будем обозначать по-прежнему $A(\zeta,\tau)$. Далее встречается только замкнутый оператор $A(\zeta,\tau)$; его область определения обозначается через $\mathcal{D}A(\zeta,\tau)$.

Из предложения 1.2 следует, что для элементов $v \in \mathring{\mathcal{D}}_1$ справедливо неравенство $\gamma^2\|v, H^1_0(\mathbb{K};p)\|^2 \leqslant c\|A(\zeta,\tau)v; L_2(\mathbb{K})\|^2$. Ясно, что это неравенство распространяется на $\mathcal{D}A(\zeta,\tau)$. Мы получили

Предложение 4.1. *Верны утверждения*:

1) $\mathcal{D}A(\zeta,\tau) \subset H_0^1(\mathbb{K};p)$;
2) $\ker A(\zeta,\tau) = 0$;
3) *линеал* $\operatorname{Im} A(\zeta,\tau)$ *замкнут в* $L_2(\mathbb{K})$.

Теперь нашей целью является доказательство равенства $\operatorname{Im} A(\zeta,\tau) = L_2(\mathbb{K})$. Сначала опишем некоторые общие свойства элементов из ядра $\ker A(\zeta,\tau)^*$ сопряженного оператора, включая возможную асимптотику таких функций вблизи вершины конуса. Затем с помощью формулы Грина установим равенство $\ker A(\zeta,\tau)^* = 0$. Ввиду предложения 4.1, 3) это означает, что $\operatorname{Im} A(\zeta,\tau) = L_2(\mathbb{K})$.

Для реализации этой схемы и для применений в §5, 6 понадобятся сведения об асимптотике решений эллиптических краевых задач в окрестности конических точек. Мы приведем сводку нужных фактов, отсылая за доказательствами к [10, 12] или [13].

2. Об асимптотике решений эллиптических задач. Пусть $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \mathfrak{A}(\lambda)$ — пучок, определенный в (1.21). Функция

$$u(y) = r^{i\lambda} \sum_{q=0}^{k} \frac{1}{q!} (i \log r)^q \varphi^{(k-q)}(\omega), \tag{4.1}$$

где $r = |y|$, $\omega = y/|y|$, оказывается решением краевой задачи

$$\mathcal{P}(D_y, 0)u(y) = 0 \quad \text{в } \mathbb{K}, \tag{4.2}$$

$$u(y) = 0 \quad \text{на } \partial\mathbb{K} \setminus 0 \tag{4.3}$$

в том и только в том случае, если λ — собственное число $\mathfrak{A}$ и $\varphi^{(0)}, \dots, \varphi^{(k-q)}$ — отвечающая этому числу жорданова цепочка ($\varphi^{(0)}$ — собственный, а $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}$ — присоединенные векторы). Всякое решение вида (4.1) будем называть степенным. Пусть $\varkappa_1 \geqslant \dots \geqslant \varkappa_J$ — все частные нулевые кратности λ_0 и $\{\varphi^{(0,j)}, \dots, \varphi^{(\varkappa_j - 1, j)}; j = 1, \dots, J\}$ — каноническая система жордановых цепочек. Функции

$$u^{(k,j)}(y) = r^{i\lambda_0} \sum_{q=0}^{k} \frac{1}{q!} (i \log r)^q \varphi^{(k-q,j)}(\omega), \tag{4.4}$$

где $k = 0, \dots, \varkappa_j - 1$, $j = 1, \dots, J$, образуют базис в пространстве степенных решений, отвечающих числу λ_0. Пусть $\mathfrak{A}(\lambda)^*$ — оператор, сопряженный с $\mathfrak{A}(\lambda)$, так что $(\mathfrak{A}(\lambda)u, v)_\Omega = (u, \mathfrak{A}(\lambda)^* v)_\Omega$ для всех $u, v \in H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)$, где $(,)_\Omega$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Введем пучок $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \mathfrak{A}^*(\lambda) := \mathfrak{A}(\overline{\lambda})^*$. Если λ_0 — собственное число $\mathfrak{A}$, то $\overline{\lambda}_0$ оказывается собственным числом для $\mathfrak{A}^*$; геометрические и алгебраические кратности λ_0 и $\overline{\lambda}_0$ совпадают. Канонические системы жордановых цепочек $\{\varphi^{(0,j)}, \dots, \varphi^{(\varkappa_j - 1, j)}; j = 1, \dots, J\}$ и $\{\psi^{(0,j)}, \dots, \psi^{(\varkappa_j - 1, j)}; j = 1, \dots, J\}$, отвечающие числам λ_0 и $\overline{\lambda}_0$, можно выбрать так, чтобы выполнялись условия ортогональности и нормировки

$$\begin{aligned} &\sum_{p=0}^{\mu} \sum_{q=0}^{k} \frac{1}{(\mu + k + 1 - p - q)!} (\partial_\lambda^{\mu+k+1-p-q} \mathfrak{A}(\lambda_0) \varphi^{(q,\sigma)}, \psi^{(p,\zeta)})_\Omega \\ &\quad = \delta_{\sigma,\zeta} \delta_{\varkappa_\sigma - k - 1, \mu}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

где $\sigma, \zeta = 1, \dots, J$; $\mu = 0, \dots, \varkappa_\zeta - 1$; $k = 0, \dots, \varkappa_\sigma - 1$; $\delta_{p,q}$ — символ Кронекера. Нетрудно проверить, что число $\overline{\lambda}_0 + i(n - d - 2)$ является собственным для пучка, порожденного формально сопряженным оператором $\mathcal{P}(D_y, 0)^* = \mathcal{P}(D_y, 0)$ (таким образом, если λ_0 — собственное число пучка $\mathfrak{A}$, то собственным будет и $\overline{\lambda}_0 + i(n - d - 2)$). Функции

$$v^{(k,j)}(y) = r^{i\overline{\lambda}_0 + 2 - n + d} \sum_{q=0}^{k} \frac{1}{q!} (i \log r)^q \psi^{(k-q,j)}(\omega) \tag{4.6}$$

образуют базис в пространстве степенных решений задачи (4.2), (4.3), отвечающих числу $\overline{\lambda}_0 + i(n - d - 2)$. При выполнении условий (4.5) базисы (4.4) и (4.6) назовем согласованными.

Подставляя функцию $u^{(k,j)}$ в однородную задачу (1.10), (1.11) и последовательно устраняя возникающие невязки, можно построить формальный ряд

$$U^{(k,j)}(y, \zeta, \tau) = \sum_{q=0}^{\infty} r^{i\lambda_0 + q} P_q^{(k,j)}(\omega, \zeta, \tau, \log r), \tag{4.7}$$

удовлетворяющий этой задаче; здесь $P_q^{(k,j)}$ — полиномы относительно $\log r$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_d)$ и τ с коэффициентами, гладко зависящими от $\omega \in \overline{\Omega}$. По ζ и τ полином $P_q^{(k,j)}$ является однородным степени q. Степень $P_q^{(k,j)}$ относительно

$\log r$ равна k, если ни при каком $h = 1, \dots, q$ не возникали резонансы, т.е. совпадения $i\lambda_0 + h = i\lambda_\nu$ (λ_ν — собственное число пучка $\mathfrak{A}$). При каждом совпадении степень $P_h^{(j,k)}$ и последующих полиномов $P_{h+1}^{(j,k)}, \dots$ повышается на кратность резонанса.

Пусть функция u принадлежит пространству $H^2_\beta(\mathbb{K})$ в окрестности вершины конуса ($\chi u \in H^2_\beta(\mathbb{K})$ для функций $\chi \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{K}})$, носители которых расположены вблизи вершины). Пусть, кроме того, выполняются уравнения

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(D_y, \zeta, \tau)u(y) &= f(y), \quad y \in \mathbb{K}, \ |y| < M, \\ u(y) &= g(y), \quad y \in \partial\mathbb{K} \setminus 0, \ |y| < M, \end{aligned}$$

где M — какое-нибудь положительное число, а $f(y)$ и $g(y)$ стремятся к нулю со сверхстепенной скоростью при подходе y к вершине. Тогда верна асимптотическая формула

$$u(y) \sim \sum c_\mu^{(k,j)} U_\mu^{(k,j)}(y); \tag{4.8}$$

через $U_\mu^{(k,j)}$ обозначен ряд вида (4.7), построенный для собственного числа λ_μ, $c_\mu^{(k,j)}$ — некоторые постоянные. Суммирование проводится по индексам $k = 0, \dots, \varkappa_{j,\mu} - 1$; $j = 1, \dots, J_\mu$ и таким μ, что $\operatorname{Im} \lambda_\mu < \beta - 2 + (n-d)/2$ (последнее неравенство означает, что фигурируют лишь те $U_\mu^{(k,j)}$, у которых все слагаемые принадлежат $H^2_\beta(\mathbb{K})$ в окрестности вершины конуса). Если из рядов $U_\mu^{(k,j)}$ справа в (4.8) отбрасываются слагаемые более высокого порядка малости, чем $O(r^\gamma)$, то оставшаяся часть суммы представляет решение u с точностью $O(r^{\gamma+\varepsilon})$ при некотором $\varepsilon > 0$.

3. Доказательство равенства $\operatorname{Im} A(\zeta, \tau) = L_2(\mathbb{K})$. Как уже отмечалось, достаточно установить, что $\ker A(\zeta, \tau)^* = 0$. Если $w \in \ker A(\zeta, \tau)^*$, то $w \in C^\infty(\overline{\mathbb{K}} \setminus 0)$, $w|(\partial\mathbb{K} \setminus 0) = 0$ и $\mathcal{L}(D_y, \zeta, \overline{\tau})w = 0$ в $\mathbb{K}$ (ввиду известных результатов о локальных свойствах решений эллиптических задач). Таким образом, w удовлетворяет задаче

$$\mathcal{P}(D_y, \zeta)w = \overline{\tau}^2 w \quad \text{в } \mathbb{K}, \tag{4.9}$$

$$w = 0 \qquad \text{на } \partial\mathbb{K} \setminus 0 \tag{4.10}$$

(подчеркнем, что параметры ζ и τ фиксированы).

Пусть $\{\varkappa_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ — разбиение единицы на $\overline{\mathbb{K}}\setminus 0$,

$$\operatorname{supp}\varkappa_j \subset \{y : 2^{j-1} < |y| < 2^{j+1}\};$$

пусть еще $\psi_j \in C^\infty(\overline{\mathbb{K}})$, $\varkappa_j\psi_j = \varkappa_j$,

$$\operatorname{supp}\psi_j \subset \{y : 2^{j-2} < |y| < 2^{j+2}\}$$

и для всех мультииндексов α

$$|D^\alpha \varkappa_j| + |D^\alpha \psi_j| \leqslant c_\alpha 2^{-j|\alpha|}.$$

Следующая лемма содержится в [17, §4] (в [17] доказательство приведено для скалярных операторов, но оно пригодно и для матричных; см. также [13, гл. 6]).

Лемма 4.2. *Пусть $\beta \in \mathbb{R}$ и w — произвольная функция из $H^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{K}}\setminus 0)$, подчиненная условию* (4.10). *Если $\zeta \neq 0$, то при всех $k = 0, \pm 1, \dots$ справедливо неравенство*

$$\|\varkappa_k w; H^2_\beta(\mathbb{K};1)\|^2 \leqslant c\{\|\psi_k \mathcal{P}(D_y,\zeta)w; H^\circ_\beta(\mathbb{K})\|^2 + 2^{2k(\beta-2)}\|\psi_k w; L_2(\mathbb{K})\|^2\}. \quad (4.11)$$

В случае $\zeta = 0$ в (4.11) *слева нужно заменить $H^2_\beta(\mathbb{K};1)$ на $H^2_\beta(\mathbb{K})$.*

Вернемся к обсуждению свойств функций из $\ker A(\zeta,\tau)^*$. Сначала рассмотрим их поведение на бесконечности. Из включения $w \in \ker A(\zeta,\tau)^*$ вытекает, что $w \in H^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{K}}\setminus 0) \cap L_2(\mathbb{K})$. В силу (4.9) $\mathcal{P}(D_y,\zeta)w \in L_2(\mathbb{K})$. Выберем $\beta \leqslant 0$, сложим неравенства (4.11) для $k = 1, 2, \dots$ и получим

$$\|\varkappa_\infty w; H^2_\beta(\mathbb{K};1)\|^2 \leqslant c\{\|\psi_\infty \mathcal{P}(D_y,\zeta)w; H^0_\beta(\mathbb{K})\|^2 + \|\psi_\infty w; H^0_{\beta-2}(\mathbb{K})\|^2\},$$

где $\varkappa_\infty$, $\psi_\infty \in C^\infty(\overline{\mathbb{K}})$, $\varkappa_\infty\psi_\infty = \varkappa_\infty$, обе функции аннулируются вблизи вершины конуса и равны единице при больших значениях $|y|$. Значит, $\varkappa_\infty w \in H^2_\beta(\mathbb{K};1) \cap H^1_{\beta-1}(\mathbb{K};1)$ для $\beta \leqslant 0$. Теперь можно итерировать неравенство (3.21) применительно к w, постепенно увеличивая β. Эта процедура доставляет

Предложение 4.3. *Пусть* $w \in \ker A(\zeta,\tau)^*$ *и* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тогда* $\varkappa_\infty w \in C^\infty(\overline{\mathbb{K}} \setminus 0) \cap H^1_\beta(\mathbb{K};1)$.

Опишем поведение $w \in \ker A(\zeta,\tau)^*$ вблизи вершины конуса. Складывая неравенства (4.11) при $\beta \geqslant 2$ для $k = 0, -1, \dots$, приходим к оценке

$$\|\chi w; H^2_\beta(\mathbb{K};1)\|^2 \leqslant c\{\|\psi \mathcal{P}(D_y,\zeta)w; H^0_\beta(\mathbb{K})\|^2 + \|\psi w; H^0_{\beta-2}(\mathbb{K})\|^2\},$$

где χ, $\psi \in C^\infty_c(\overline{\mathbb{K}})$, $\chi\psi = \chi$ и $\chi = 1$ в окрестности вершины. Включение $\chi w \in H^2_\beta(\mathbb{K})$ позволяет применить асимптотическую формулу вида (4.8) для функции w. Уточним описание этой асимптотики. Пусть $v^{(k,j)}_\nu$ — функция, определенная равенством (4.6) с заменой λ_0 на собственное число λ_ν, $\psi^{(k,j)}$ на $\psi^{(k,j)}_\nu$ и т.п. Через $V^{(k,j)}_\nu$ обозначим асимптотическое решение однородной задачи (1.10), (1.11) (с заменой τ на $\overline{\tau}$), построенное по $v^{(k,j)}_\nu$ так же, как $U^{(k,j)}_\mu$ строились по $u^{(k,j)}_\mu$ (т.е. $v^{(k,j)}_\nu$ — главное слагаемое формального ряда $V^{(k,j)}_\nu$). Тогда вблизи вершины конуса $\mathbb{K}$ функция $w \in \ker A(\zeta,\tau)^*$ допускает асимптотику

$$w \sim \sum d^{(k,j)}_\nu V^{(k,j)}_\nu, \tag{4.12}$$

где $d^{(k,j)}_\nu$ — некоторые постоянные. Ввиду включения $w \in L_2(\mathbb{K})$ справа в (4.12) могут фигурировать лишь такие $V^{(k,j)}_\nu$, что $\chi v^{(k,j)}_\nu \in L_2(\mathbb{K})$. Из (4.6) следует, что соответствующие собственные числа λ_ν должны подчиняться условию

$$\operatorname{Im}\lambda_\nu > (n-d)/2 - 2. \tag{4.13}$$

Выражение $\mathcal{L}(D_x, D_t)$ инвариантно относительно обращения хода времени. Поэтому γ можно заменить на $-\gamma$ и вместе с оператором $A(\zeta,\tau)$ ввести и оператор $A(\zeta,\overline{\tau})$ с аналогичными свойствами. В частности, для элементов v из области определения $\mathcal{D}A(\zeta,\overline{\tau})$ оператора $A(\zeta,\overline{\tau})$ имеет место неравенство

$$\gamma^2\|v; H^1_0(\mathbb{K};p)\|^2 \leqslant c\|A(\zeta,\overline{\tau})v; L_2(\mathbb{K})\|^2; \tag{4.14}$$

сохраняется и предложение 4.1 (с $\overline{\tau}$ вместо τ). Функция $\chi v^{(k,j)}_\nu$ попадает в $\mathcal{D}A(\zeta,\overline{\tau})$, если и только если $\chi v^{(j,k)}_\nu \in H^1_0(\mathbb{K})$. Последнее включение эквивалентно условию

$$\operatorname{Im}\lambda_\nu > (n-d)/2 - 1. \tag{4.15}$$

Предложение 4.4. *Верна формула* $\ker A(\zeta,\tau)^* \subset \mathcal{D}A(\zeta,\overline{\tau})$, *и потому* $\ker A(\zeta,\tau)^* = 0$.

Доказательство. Указанное включение означает, что $\ker A(\zeta,\tau)^* \subseteq \ker A(\zeta,\overline{\tau}) = 0$ (см. (4.14)).

Проверим включение $\ker A(\zeta,\tau)^* \subset \mathcal{D}A(\zeta,\overline{\tau})$. Гладкость элементов $w \in \ker A(\zeta,\tau)^*$ вне вершины конуса и быстрое убывание на бесконечности уже установлены (предложение 4.3). Поэтому достаточно показать, что асимптотика w около вершины может содержать лишь такие слагаемые $V_\nu^{(k,j)}$, для которых $\chi v_\nu^{(k,j)} \in \mathcal{D}A(\zeta,\overline{\tau})$. Согласно неравенствам (4.13) и (4.15), остается убедиться, что в асимптотике нет слагаемых $V_\nu^{(k,j)}$, подчиненных условию

$$(n-d)/2-2 < \operatorname{Im}\lambda_\nu < (n-d)/2-1 \tag{4.16}$$

(прямая $\operatorname{Im}\lambda = (n-d)/2-1$ свободна от спектра пучка $\mathfrak{A}$).

Итак, пусть выполнены неравенства (4.16) для некоторого λ_ν. Из правого неравенства следует, что $\chi u_\nu^{(k,j)} \in \mathcal{D}A(\zeta,\tau)$. Будем считать базисы (4.4) и (4.6) согласованными (т.е. подчиненными условиям (4.5)). Тогда по теореме о коэффициентах в асимптотике решений ([12] или [13, гл. 4]) число $d_\nu^{(k,j)}$ в (4.12) определяется формулой

$$d_\nu^{(k,j)} = (\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)\chi u_\nu^{(k,j)}, w) = (A(\zeta,\tau)\chi u_\nu^{(k,j)}, w) = 0. \quad \bullet$$

4. Существование и единственность сильных решений. Сильным решением задачи

$$\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)u(y) = f(y), \quad y \in \mathbb{K}, \tag{4.17}$$
$$u(y) = 0, \quad y \in \partial\mathbb{K}, \tag{4.18}$$

при $f \in L_2(\mathbb{K})$ назовем решение уравнения $A(\zeta,\tau)u = f$.

Из предложений 4.1 и 4.4 вытекает

Теорема 4.5. *При всякой функции* $f \in L_2(\mathbb{K})$ *и любых значениях параметров* $\zeta \in \mathbb{R}^d$ *и* $\tau = \sigma - i\gamma$ *(*$\sigma \in \mathbb{R}, \gamma > 0$*) существует единственное сильное решение задачи* (4.17), (4.18). *Для этого решения верна оценка*

$$\gamma^2\|u; H_0^1(\mathbb{K};p)\|^2 \leqslant c\|f; L_2(\mathbb{K})\|^2;$$

постоянная c не зависит ни от f, ни от параметров ζ и τ.

Теперь рассмотрим оператор краевой задачи

$$\mathcal{L}(D_y, \zeta, \tau)u(y) = f(y), \quad y \in \mathbb{K}, \tag{4.19}$$

$$u(y) = g(y), \quad y \in \partial\mathbb{K} \setminus 0, \tag{4.20}$$

связанный с оценкой (3.14). Напомним, что после леммы 3.4 были определены линеалы $\mathcal{D}_\beta$. Для элементов $v \in \mathcal{D}_1$ введем неограниченный оператор $\mathcal{A}(\zeta, \tau)$ в пространстве $L_2(\mathbb{K}) \times H_0^1(\partial\mathbb{K}; p)$,

$$\mathcal{D}_1 \ni v \mapsto \mathcal{A}(\zeta, \tau)v := \{\mathcal{L}(D_y, \zeta, \tau)v, v \mid \partial\mathbb{K}\}. \tag{4.21}$$

Нетрудно проверить, что оператор (4.21) допускает замыкание; впредь через $\mathcal{A}(\zeta, \tau)$ обозначается замкнутый оператор с областью определения $\mathcal{D}\mathcal{A}(\zeta, \tau)$. Из предложения 3.5 следует, что для элементов v из $\mathcal{D}\mathcal{A}(\zeta, \tau)$ имеет место включение $\{v, v|\partial\mathbb{K}, D_\nu v|\partial\mathbb{K}\} \in H_0^1(\mathbb{K}; p) \times H_0^1(\partial\mathbb{K}; p) \times L_2(\mathbb{K})$ и сохраняется неравенство (3.14). Поэтому образ $\operatorname{Im} \mathcal{A}(\zeta, \tau)$ замкнут, а ядро $\ker \mathcal{A}(\zeta, \tau)$ тривиально. Доказательство равенства $\operatorname{Im} \mathcal{A}(\zeta, \tau) = L_2(\mathbb{K}) \times H_0^1(\partial\mathbb{K}; p)$ по существу содержится в проверке соотношения $\operatorname{Im} A(\zeta, \tau) = L_2(\mathbb{K})$ из предыдущего раздела.

Сильным решением задачи (4.19), (4.20) для $f \in L_2(\mathbb{K})$ и $g \in H_0^1(\partial\mathbb{K})$ назовем решение уравнения $\mathcal{A}(\zeta, \tau)u = \{f, g\}$. Указанные свойства оператора $\mathcal{A}(\zeta, \tau)$ оправдывают следующее утверждение.

Теорема 4.6. *Пусть выполнены условия предложения* 3.5. *Тогда при любых $f \in L_2(\mathbb{K})$ и $g \in H_0^1(\partial\mathbb{K})$ для всех значений параметров $\zeta \in \mathbb{R}^d$ и $\tau = \sigma - i\gamma$ ($\sigma \in \mathbb{R}, \gamma > 0$) существует единственное сильное решение задачи* (4.19), (4.20). *Для этого решения справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\gamma^2 \|u; H_0^1(\mathbb{K}; p)\|^2 + \gamma \|D_\nu u; L_2(\partial\mathbb{K})\|^2 \\ &\quad \leqslant c\{\|f; L_2(\mathbb{K})\|^2 + \gamma \|g; H_0^1(\partial\mathbb{K}; p)\|^2\}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Постоянная c не зависит ни от вектора $\{f, g\}$, ни от параметров ζ и τ.

Замечание 4.7. В теореме 4.5 можно включить в рассмотрение неоднородное краевое условие, если потребовать от функции g бóльшей гладкости, чем предполагает неравенство (4.22). Именно если $g \in H_0^{3/2}(\partial\mathbb{K}; p)$, то существует такое продолжение $v \in \overset{\circ}{H}{}^2_0(\mathbb{K};p)$, $v \mid \partial\mathbb{K} = g$, что $c_1\|v; H^2_0(\mathbb{K};p)\| \leqslant \|g; H^{3/2}_0(\partial\mathbb{K};p)\| \leqslant c_2\|v; H^2_0(\mathbb{K};p)\|$. Это позволяет свести неоднородное условие к однородному и получить для решения оценку

$$\gamma^2\|u; H^1_0(\mathbb{K};p)\|^2 \leqslant c\{\|f; L_2(\mathbb{K})\|^2 + \|g; H^{3/2}_0(\partial\mathbb{K};p)\|^2\}.$$

§5. Краевая задача в конусе в шкале весовых пространств

Комбинированные весовые оценки из §1–3 позволяют изучить свойства оператора краевой задачи (4.19), (4.20) в шкале соответствующих весовых пространств. Для этой цели обобщается схема, использованная в §4. Полученные результаты применяются затем в §6 для вывода асимптотики решений вблизи вершины конуса.

1. Оператор задачи в конусе. Пусть $\beta \in \mathbb{R}$ и $q = 0, 1, \ldots$ Обозначим через $\mathcal{D}H_{\beta,q}(\mathbb{K};p)$ пополнение множества $C^\infty_c(\overline{\mathbb{K}} \setminus 0)$ по норме

$$\|v; \mathcal{D}H_{\beta,q}(\mathbb{K};p)\| = (\|\chi_p v; H^{2+q}_{\beta+q}(\mathbb{K};p)\|^2 + \gamma^2\|v; H^{1+q}_{\beta+q}(\mathbb{K};p)\|^2)^{1/2}; \tag{5.1}$$

здесь χ — фиксированная функция из $C^\infty_c(\overline{\mathbb{K}})$, $\chi = 1$ вблизи вершины конуса $\mathbb{K}$, $\chi_p(y) = \chi(py)$. Норма (5.1) и следующая норма (5.2) подсказаны неравенством (2.16). Введем еще пространство $\mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K};p)$ с нормой

$$\begin{aligned}\|f; &\mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K};p)\| \\ &= \left(\sum_{j=0}^{q}(p/\gamma)^{2j}\|f; H^{q-j}_{\beta+q-j}(\mathbb{K};p)\|^2 + (p^{1-\beta+q}/\gamma^{1+q})^2\|f; L_2(\mathbb{K})\|^2\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{5.2}$$

Поскольку имеют место вложения $H^{q-j+1}_{\beta+q-j+1}(\mathbb{K};p) \subset H^{q-j}_{\beta+q-j}(\mathbb{K};p)$ и неравенства

$$\|v; H^{q-j}_{\beta+q-j}(\mathbb{K};p)\| \leqslant \|v; H^{q-j+1}_{\beta+q-j+1}(\mathbb{K};p)\|, \tag{5.3}$$

то при фиксированных параметрах p и γ норма (5.2) эквивалентна норме

$$(\|f; H^q_{\beta+q}(\mathbb{K};p)\|^2 + \|f; L_2(\mathbb{K})\|^2)^{1/2}. \tag{5.4}$$

С задачей (4.17), (4.18) сопоставим неограниченный оператор в $\mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K};p)$ с областью определения $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\beta$:

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\beta \ni v \mapsto \mathcal{L}(D_y, \zeta, \tau)v.$$

Как и в п. 4.1, нетрудно проверить, что этот оператор допускает замыкание, которое мы будем обозначать $A_{\beta,q}(\zeta,\tau)$.

Предложение 5.1. *Пусть* $\beta \leqslant 1$. *Тогда для всех* $q = 0, 1, \dots$ *верны утверждения*:

1) $\mathcal{D}A_{\beta,q}(\zeta,\tau) \subset \mathcal{D}A(\zeta,\tau)$;
2) $\ker A_{\beta,q}(\zeta,\tau) = 0$;
3) *если прямая* $\operatorname{Im}\lambda = \beta + (n-d)/2 - 2$ *не содержит собственных чисел пучка* $\mathfrak{A}$, *то линеал* $\operatorname{Im} A_{\beta,q}(\zeta,\tau)$ *замкнут в* $\mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K};p)$.

Доказательство. Ввиду неравенства (5.3) имеют место непрерывные вложения $\mathcal{D}H_{\beta,q}(\mathbb{K};p) \subset \mathcal{D}H_{\beta}(\mathbb{K};p)$ и $\mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K};p) \subset \mathcal{R}H_{\beta}(\mathbb{K};p)$. Если последовательности $\{v_n\}$ и $\{\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v_n\}$ фундаментальны в $\mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K};p)$, то они остаются фундаментальными в $\mathcal{R}H_{\beta}(\mathbb{K};p)$. Отсюда вытекает первое утверждение. Второе следует из соотношений $\ker A_{\beta,q}(\zeta,\tau) \subset \ker A(\zeta,\tau) = 0$. Третье утверждение получается из неравенства

$$\|v;\mathcal{D}H_{\beta,q}(\mathbb{K};p)\| \leqslant c\|\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v;\mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K};p)\|,$$

которое совпадает с оценкой (2.16) (см. замечание 1.4). •

Пусть $A_{\beta,q}(\zeta,\tau)^*$ — неограниченный оператор в $\mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K};p)^*$, сопряженный с $A_{\beta,q}(\zeta,\tau)$ относительно двойственности в $L_2(\mathbb{K})$. Заметим, что при фиксированных параметрах эквивалентная норма в $\mathcal{R}H_{\beta}(\mathbb{K};p)^*$ равна

$$\left(\int |v(y)|^2(1+|y|^{2\beta})^{-1}dy\right)^{1/2}.$$

Кроме того, $\mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K};p)^* \supset \mathcal{R}H_{\beta}(\mathbb{K};p)^*$ для $q = 0, 1, \dots$ (при $q = 0$ пространства совпадают). С уменьшением β в пространство $\mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K};p)^*$ допускаются элементы с бóльшим порядком особенности у вершины конуса.

Пусть $1 > \beta_1 > \beta_2 > \dots$ — все такие числа на интервале $(-\infty, 1]$, что каждая из прямых $\operatorname{Im}\lambda = \beta_k - 2 + (n-d)/2$ содержит хотя бы одно собственное значение пучка $\mathfrak{A}$. (Напомним, что прямая $\operatorname{Im}\lambda = (n-d)/2 - 1$ свободна от спектра $\mathfrak{A}$). Обозначим через N_l количество собственных значений $\mathfrak{A}$ (с учетом кратностей), расположенных в полосе

$$\beta_l - 2 + (n-d)/2 \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant (n-d)/2 - 1. \tag{5.5}$$

Предложение 5.2. 1) *Если* $\beta_1 < \beta \leqslant 1$, *то* $\ker A_{\beta,q}(\zeta,\tau)^* = 0$ *и, значит,* $\operatorname{Im} A_{\beta,q}(\zeta,\tau) = \mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K};p)$.

2) *Если* $\beta_{l+1} < \beta < \beta_l$, *то* $\dim\ker A_{\beta,q}(\zeta,\tau)^* = N_l$.

Доказательство. 1) Проверка этого утверждения повторяет с незначительными изменениями доказательство равенства $\ker A(\zeta,\tau)^* = 0$ (см. п. 4.3).

2) Мы предъявим базис линеала $\ker A_{\beta,q}(\zeta,\tau)^*$, состоящий из N_l элементов; они определяются однозначно своей асимптотикой вблизи вершины. (Главные члены этих асимптотик, разумеется, не принадлежат пространству $H_0^1(\mathbb{K};p)$).

Напомним, что в п. 4.3 были введены асимптотические решения $V_\nu^{(k,j)}$ однородной задачи (4.17), (4.18) (с заменой τ на $\overline{\tau}$). Формальный ряд $V_\nu^{(k,j)}$ записывается в виде

$$V_\nu^{(k,j)}(y,\zeta,\overline{\tau}) = \sum_{t=0}^{\infty} r^{i\overline{\lambda}_\nu+2-n+d+t} Q_{t,\nu}^{(k,j)}(\omega,\zeta,\overline{\tau},\log r); \tag{5.6}$$

слагаемое с номером $t = 0$ задано равенством (4.6) при $\lambda_0 = \lambda_\nu$. Обозначим через $V_{\nu,T}^{(k,j)}$ частную сумму ряда (5.6) из T слагаемых (с номерами $t \leqslant T-1$). Пусть $\eta \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{K}})$, $\eta = 1$ около вершины конуса. Тогда

$$F_{\nu,T}^{(k,j)}(y) := \mathcal{L}(D_y,\zeta,\overline{\tau})\eta V_{\nu,T}^{(k,j)}(y,\zeta,\overline{\tau}) = O(r^{\operatorname{Im}\lambda_\nu+2-n+d+T}). \tag{5.7}$$

Для каждого собственного значения λ_ν из полосы (5.5) и заданного канонического набора отвечающих ему жордановых цепочек определим функции $F_{\nu,T}^{(k,j)}$, выбирая T столь большим, чтобы выполнялось включение $F_{\nu,T}^{(k,j)} \in L_2(\mathbb{K})$.

Заметим, что, при условии $\operatorname{Im}\lambda_\nu < (n-d)/2-1$, функция $\eta v_\nu^{(j,k)}$ не принадлежит пространству $H_0^1(\mathbb{K})$. С другой стороны, неравенства $\beta_l - 2 + (n-d)/2 \leqslant \operatorname{Im}\lambda_\nu$ и $\beta < \beta_l$ обеспечивают включение

$$\eta v_\nu^{(k,j)} \in \mathcal{R}H_\beta(\mathbb{K};p)^* \subset \mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K};p)^*$$

для всех $q = 0, 1, \ldots$

Пусть $w_{\nu,T}^{(k,j)}$ — сильное решение задачи (4.17), (4.18) с $\overline{\tau}$ вместо τ и правой частью $F_{\nu,T}^{(k,j)}$ (такое решение существует и единственно по теореме 4.5). Ясно, что функции

$$w_\nu^{(k,j)} := w_{\nu,T}^{(k,j)} - \eta V_{\nu,T}^{(k,j)} \tag{5.8}$$

удовлетворяют однородной краевой задаче; они не зависят ни от T, ни от срезающей функции η. Ввиду локальных свойств решений эллиптических задач $w_\nu^{(k,j)} \in C^\infty(\overline{\mathbb{K}} \setminus 0)$. С очевидными изменениями повторяя рассуждения из раздела 4.3, устанавливаем, что функции (5.8) быстро убывают на бесконечности (см. предложение 4.3), а в окрестности вершины допускают разложение в асимптотический ряд.

Покажем, что $w_\nu^{(k,j)} \in \ker A_{\beta,q}(\zeta,\tau)^*$ (при $\beta \in (\beta_{l+1},\beta_l)$, $q = 0,1,\dots$). Пусть $f \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{K}} \setminus 0)$ и $u \in \mathcal{D}A(\zeta,\tau)$ — сильное решение задачи (4.17), (4.18). У вершины конуса функция u представляется асимптотикой

$$u \sim \sum c_\nu^{(k,j)} U_\nu^{(k,j)},$$

причем в сумме участвуют такие ν, что $\operatorname{Im}\lambda_\nu < (n-d)/2-1$. Будем считать, что базисы $\{u_\nu^{(k,j)}\}$ и $\{v_\nu^{(k,j)}\}$, по которым построены ряды $U_\nu^{(k,j)}$ и $V_\nu^{(k,j)}$, выбраны согласованно (выполнены условия (4.5)). Тогда по теореме о коэффициентах в асимптотике решений эллиптических задач ([12] или [13, гл. 4])

$$c_\nu^{(k,j)} = i(f, w_\nu^{(k,j)}). \tag{5.9}$$

При $\beta < \beta_l$ и $\operatorname{Im}\lambda_\nu \geqslant \beta_l - 2 + (n-d)/2$ функция $\eta u_\nu^{(k,j)}$ не принадлежит пространству $\mathcal{D}H_{\beta,q}(\mathbb{K};p)$. Поэтому равенства $(f, w_\nu^{(k,j)}) = 0$ необходимы для включения $u \in \mathcal{D}A_{\beta,q}(\zeta,\tau)$. Значит, $w_\nu^{(k,j)} \in \ker A_{\beta,q}(\zeta,\tau)^*$.

Наконец, убедимся в том, что функции $w_\nu^{(k,j)}$, отвечающие собственным числам λ_ν из полосы (5.5), образуют базис в пространстве $\ker A_{\beta,q}(\zeta,\tau)^*$, $\beta \in (\beta_{l+1},\beta_l)$.

Пусть w — произвольный элемент из $\ker A_{\beta,q}(\zeta,\tau)^*$. Согласно сказанному в п. 4.2, функция w у вершины конуса обладает асимптотикой, из которой следует представление

$$w = \sum d_\nu^{(k,j)} \eta V_{\nu,T}^{(k,j)} + w',$$

где $w' \in \mathcal{D}A(\zeta,\overline{\tau})$, T — большое число, а в сумме участвуют $V_{\nu,T}^{(k,j)}$ для собственных чисел λ_ν из полосы (5.5). Поэтому $z = w - \sum d_\nu^{(k,j)} w_\nu^{(k,j)} \in \ker A_{\beta,q}(\zeta,\tau)^*$ и $z \in \mathcal{D}A(\zeta,\overline{\tau})$. Значит, $z \in \ker A(\zeta,\overline{\tau}) = 0$. •

2. Сильные (β, q)-решения. Сильным (β, q)-решением задачи (4.17), (4.18) с правой частью $f \in \mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K}; p)$ назовем решение уравнения $A_{\beta,q}(\zeta, \tau)u = f$. Предложения 5.1 и 5.2 приводят к следующей теореме о существовании и единственности таких решений.

Теорема 5.3. 1) *Если $\beta_1 < \beta \leqslant 1$, то для каждой функции $f \in \mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K}; p)$ существует единственное сильное (β, q)-решение и задачи* (4.17), (4.18). *Справедлива оценка*

$$\|u; \mathcal{D}H_{\beta,q}(\mathbb{K}; p)\| \leqslant c(\beta, q)\|f; \mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K}; p)\|, \tag{5.10}$$

в которой постоянная $c(\beta, q)$ не зависит ни от f, ни от параметров $\zeta \in \mathbb{R}^d$, $\tau = \sigma - i\gamma$, где $\sigma \in \mathbb{R}$ и $\gamma > 0$.

2) *Если $\beta \in (\beta_{l+1}, \beta_l)$, то сильное (β, q)-решение существует лишь для функций $f \in \mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K}; p)$, подчиненных условиям $(f, w_\nu^{(k,j)}) = 0$, где $w_\nu^{(k,j)}$ — элементы из $\ker A_{\beta,q}(\zeta, \tau)^*$, построенные в предложении 5.2 и отвечающие собственным числам λ_ν из полосы* (5.5). *Сильное (β, q)-решение единственно. Справедлива оценка* (5.10).

3) *Если $f \in \mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K}; p)$ и существует сильное (β, q)-решение, то оно является и сильным решением задачи* (4.17), (4.18).

Подчеркнем, что последнее утверждение теоремы описывает улучшение дифференциальных свойств решений при соответствующем улучшении свойств правой части. (Если $f \in \mathcal{R}H_{\beta,q+1}(\mathbb{K}; p)$, то сильное (β, q)-решение оказывается сильным $(\beta, q+1)$-решением).

Приведем формулировку аналогичной теоремы, основанной на оценке (3.17). Пусть имеет место формула Грина

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}(D_y, \zeta, \tau)u, v)_{\mathbb{K}} &+ (u, T(D_y, \zeta)v)_{\partial\mathbb{K}} \\ &= (u, \mathcal{L}(D_y, \zeta, \overline{\tau})v)_{\mathbb{K}} + (T(D_y, \zeta)u, v)_{\partial\mathbb{K}}\end{aligned} \tag{5.11}$$

для всех $u, v \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{K}} \setminus 0)$ (эта формула понадобится для описания условий разрешимости (см. теорему 5.3, 2), и равенства (5.9)). Обозначим через $\mathcal{DH}_\beta(\mathbb{K}; p)$ пространство с нормой

$$\begin{aligned}&\|v; \mathcal{DH}_\beta(\mathbb{K}; p)\| \\ &\quad = (\|\chi_p v; H_\beta^2(\mathbb{K}; p)\|^2 + \gamma^2\|v; H_\beta^1(\mathbb{K}; p)\|^2 + \gamma\|D_\nu v; H_\beta^0(\partial\mathbb{K})\|^2)^{1/2},\end{aligned}$$

где χ — фиксированная функция из $C_c^\infty(\overline{\mathbb{K}})$, $\chi = 1$ в окрестности вершины $\mathbb{K}$, $\chi_p(y) = \chi(py)$. Норму в пространстве $\mathcal{RH}_\beta(\mathbb{K};p)$ вектор-функций $\{f,g\}$ определим равенством

$$\begin{aligned}
&\|\{f,g\};\mathcal{RH}_\beta(\mathbb{K};p)\| \\
&\quad= (\|f;H^0_\beta(\mathbb{K})\|^2 + (p^{2(1-\beta)}/\gamma^2)\|f;L_2(\mathbb{K})\|^2 \\
&\qquad+ \|\chi_p g;H^{3/2}_\beta(\partial\mathbb{K};p)\|^2 + \gamma\|g;H^1_0(\partial\mathbb{K};p)\|^2 \\
&\qquad\qquad+(p^{2(1-\beta)}/\gamma)\|v;H^1_0(\partial\mathbb{K};p)\|^2)^{1/2}.
\end{aligned}$$

На множестве $\mathcal{D}_\beta$ (см. определение после леммы 3.4) введем отображение

$$\mathcal{D}_\beta \ni v \mapsto \mathcal{A}_\beta(\zeta,\tau)v := \{\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v, v \mid \partial\mathbb{K}\},$$

которое будем рассматривать как неограниченный оператор в $\mathcal{RH}_\beta(\mathbb{K};p)$. Этот оператор допускает замыкание; только оно впредь и обозначается через $\mathcal{A}_\beta(\zeta,\tau)$.

Сильным β-решением задачи (4.19), (4.20) для $\{f,g\} \in \mathcal{RH}_\beta(\mathbb{K};p)$ назовем решение уравнения $\mathcal{A}_\beta(\zeta,\tau)u = \{f,g\}$.

Теорема 5.4. *Пусть выполнены условия предложения* 3.5. *Тогда*:

1) *Если* $\beta_1 < \beta \leqslant 1$, *то для* $\{f,g\} \in \mathcal{RH}_\beta(\mathbb{K};p)$ *существует единственное сильное* β*-решение* u *задачи* (4.19), (4.20) (*при любых значениях параметров* $\zeta \in \mathbb{R}^d$, $\tau = \sigma - i\gamma$, *где* $\sigma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$).

Справедлива оценка

$$\|u;\mathcal{DH}_\beta(\mathbb{K};p)\| \leqslant c(\beta)\|\{f,g\};\mathcal{RH}_\beta(\mathbb{K};p)\|, \tag{5.12}$$

в которой постоянная $c(\beta)$ *не зависит от параметров.*

2) *Если* $\beta \in (\beta_{l+1},\beta_l)$, *то сильное* β*-решение существует лишь для векторов* $\{f,g\}$, *подчиненных условиям*

$$(f,w_\nu^{(k,j)})_{\mathbb{K}} + (g,T(D_y,\zeta)w_\nu^{(k,j)})_{\partial\mathbb{K}} = 0,$$

где $w_\nu^{(k,j)}$ — *те же функции, что и в теореме* 5.3, *а* $T(D_y,\zeta)$ — *оператор из формулы Грина* (5.11). *Сильное* β*-решение единственно. Справедлива оценка* (5.12).

3) *Если* $\{f,g\} \in \mathcal{RH}_\beta(\mathbb{K};p)$ *и существует сильное* β*-решение, то оно является и сильным решением.*

§6. Асимптотика решений задачи в конусе

Пусть $f \in \mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K};p)$ и $\beta \in (\beta_{k+1},\beta_k)$ для каких-нибудь $q = 0,1,\dots$ и $k = 1,2,\dots$ Так как $\mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K};p) \subset L_2(\mathbb{K})$, то по теореме 4.5 существует единственное сильное решение u задачи (4.17), (4.18), $u \in \mathcal{D}A(\zeta,\tau) \subset \overset{\circ}{H}{}^1(\mathbb{K};p)$. Это решение оказывается элементом пространства $\mathcal{D}H_{\beta,q}(\mathbb{K};p)$, если

$$(f, w_\nu^{(k,j)}) = 0 \tag{6.1}$$

для всех $w_\nu^{(k,j)} \in \ker A_{\beta,q}(\zeta,\tau)^*$ (см. теорему 5.3). Если же условия (6.1) не выполнены, то возникает вопрос об асимптотике сильного решения по модулю пространства $\mathcal{D}H_{\beta,q}(\mathbb{K};p)$. Мы покажем, что выбором коэффициентов $c_\nu^{(k,j)}$ можно обеспечить включение $u - \chi_p \sum c_\nu^{(k,j)} U_{\nu,T}^{(k,j)} \in \mathcal{D}H_{\beta,q}(\mathbb{K};p)$; суммирование производится по тем (ν,k,j), которые отвечают собственным числам λ_ν из полосы (5.5), $\chi \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{K}})$, $\chi = 1$ вблизи вершины конуса (обозначения типа $U_{\nu,T}^{(k,j)}$ введены после формулы (5.6)). Коэффициенты $c_\nu^{(k,j)}$ зависят от f и параметров ζ и τ. Отображение $\mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K};p) \ni f \mapsto c_\nu^{(k,j)}(f)$ оказывается линейным функционалом. Для оценки зависимости от параметров удобно сначала рассмотреть задачу (1.12), (1.13) (в переменных $\eta = yp$), а затем вернуться к задаче (4.17), (4.18).

Итак, рассмотрим уравнения

$$\mathcal{L}(D_\eta,\theta)U(\eta) = F(\eta), \quad \eta \in \mathbb{K}, \tag{6.2}$$

$$U(\eta) = 0, \qquad \eta \in \partial\mathbb{K}, \tag{6.3}$$

считая, что $\theta = (\zeta,\tau)$, $|\zeta|^2 + |\tau|^2 = 1$. Для этого случая функции $U_{\nu,T}^{(k,j)}$ будем обозначать через $\mathcal{U}_{\nu,T}^{(k,j)}$. Пусть $F \in \mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K};1)$ и $\beta \in (\beta_{l+1},\beta_l)$, где

$$\begin{aligned}
&\|F;\mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K};1)\|^2 \\
&\quad = \sum_{j=0}^{q} (p/\gamma)^{2j} \|f; H^{q-j}_{\beta+q-j}(\mathbb{K};1)\|^2 + (p/\gamma)^{2(1+q)} \|f; L_2(\mathbb{K})\|^2.
\end{aligned}$$

Представим сильное решение $U \in \overset{\circ}{H}{}^1(\mathbb{K};1)$ задачи (6.2), (6.3) в виде

$$U = \chi \sum d_\nu^{(k,j)} \mathcal{U}_{\nu,T}^{(k,j)} + V. \tag{6.4}$$

Из теоремы 5.3, 2, следует, что $V \in \mathcal{D}H_{\beta,q}(\mathbb{K};1)$ при

$$d_\nu^{(k,j)} = (F, \mathcal{W}_\nu^{(k,j)}) \tag{6.5}$$

(двойственность в $L_2(\mathbb{K})$); здесь

$$\|V; \mathcal{D}H_{\beta,q}(\mathbb{K};1)\|^2 = \|\chi V; H^{2+q}_{\beta+q}(\mathbb{K};1)\|^2 + (\gamma/p)^2\|V; H^1_\beta(\mathbb{K};1)\|^2,$$

а через $\mathcal{W}_\nu^{(k,j)}$ обозначен базис пространства $\ker A_{\beta,q}(\theta)^*$, построенный в предложении 5.2. Для таких коэффициентов $d_\nu^{(k,j)}$ функция V оказывается сильным (β,q)-решением задачи (6.2), (6.3) с правой частью $F' := F - \mathcal{L}(D_\eta,\theta)\chi\sum d_\nu^{(k,j)}\mathcal{U}_{\nu,T}^{(k,j)}$. Согласно (5.10), имеет место неравенство

$$\|V'; \mathcal{D}H_{\beta,q}(\mathbb{K};1)\| \leqslant c\|F'; \mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K};1)\|. \tag{6.6}$$

Так как $\mathcal{W}_\nu^{(k,j)} \in \mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K};1)^*$, то, учитывая (6.5), получаем

$$|d_\nu^{(k,j)}| \leqslant c\|F; \mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K};1)\|. \tag{6.7}$$

Поэтому (при достаточно большом T)

$$\left\|\mathcal{L}(D_\eta,\theta)\chi\sum d_\nu^{(k,j)}\mathcal{U}_{\nu,T}^{(k,j)}; \mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K};1)\right\| \leqslant c\|F; \mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K};1)\|.$$

Вместе с (6.6) это приводит к оценке

$$\|V; \mathcal{D}H_{\beta,q}(\mathbb{K};1)\| \leqslant c\|F; \mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K};1)\|. \tag{6.8}$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Предложение 6.1. *Пусть $F \in \mathcal{R}H_{\beta,q}(\mathbb{K};1)$ и $\beta \in (\beta_{k+1},\beta_k)$. Тогда сильное решение $U \in H^1_0(\mathbb{K};1)$ задачи* (6.2), (6.3) *допускает представление* (6.4). *Для остатка V верна оценка* (6.8), *а коэффициенты $d_\nu^{(k,j)}$ в асимптотике определяются равенствами* (6.5) *и подчиняются неравенству* (6.7).

Приведем аналогичный пример для задачи

$$\mathcal{L}(D_\eta,\theta)U(\eta) = F(\eta), \quad \eta \in \mathbb{K}, \tag{6.9}$$

$$U(\eta) = G(\eta), \quad \eta \in \partial\mathbb{K}\setminus 0. \tag{6.10}$$

Напомним, что пространства $\mathcal{RH}_\beta(\mathbb{K};p)$ и $\mathcal{DH}_\beta(\mathbb{K};p)$ были введены перед формулировкой теоремы 5.4.

Предложение 6.2. *Пусть выполнены условия предложения* 3.5 *и справедлива формула Грина* (5.11). *Предположим, что* $\{F, G\} \in \mathcal{RH}_\beta(\mathbb{K}; 1)$, *причем* $\beta \in (\beta_{l+1}, \beta_l)$. *Тогда решение* U *задачи* (6.9), (6.10) *допускает представление вида* (6.4). *Для остатка* V *выполняется неравенство*

$$\|V; \mathcal{DH}_\beta(\mathbb{K}; 1)\| \leqslant c\|\{F, G\}; \mathcal{RH}_\beta(\mathbb{K}; 1)\|,$$

а коэффициенты $d_\nu^{(k,j)}$ *в асимптотике определяются формулами*

$$d_\nu^{(k,j)} = (F, \mathcal{W}_\nu^{(k,j)})_{\mathbb{K}} + (G, T(D_\eta, \zeta/p)\mathcal{W}_\nu^{(k,j)})_{\partial\mathbb{K}}.$$

Верны оценки

$$|d_\nu^{(k,j)}| \leqslant c\|\{F, G\}; \mathcal{RH}_\beta(\mathbb{K}; 1)\|.$$

Замечание 6.3. Из предложений 6.1, 6.2 непосредственно получается описание асимптотики сильных β-решений по модулю $\mathcal{D}H_{\beta'}(\mathbb{K}; 1)$ (или $\mathcal{DH}_{\beta'}(\mathbb{K}; 1)$) при условии, что правая часть задачи принадлежит пространству $\mathcal{R}H_{\beta'}(\mathbb{K}; 1)$) (или $\mathcal{RH}_{\beta'}(\mathbb{K}; 1)$) с показателем $\beta' < \beta$.

Для применения полученных результатов к задаче в клине нужно перейти к переменным $y = \eta/p$. (Дальнейшее исследование асимптотики состоит в очевидном повторении приемов, использованных в аналогичной ситуации для эллиптических краевых задач (см. [18] и [13, гл. 9]). Мы выберем для обсуждения простую ситуацию).

Пусть U — сильное β-решение задачи (6.2), (6.3), $F \in \mathcal{R}H_{\beta'}(\mathbb{K}; 1)$, причем $\beta, \beta' \notin \{\beta_k\}$, а интервал (β', β) содержит по крайней мере одно число из последовательности $\{\beta_k\}$. Предположим, что $\beta - \beta' < 1$. Тогда в асимптотике (6.4) присутствуют слагаемые, отвечающие собственным числам λ_ν из полосы

$$\beta' - 2 + (n-d)/2 < \operatorname{Im}\lambda < \beta - 2 + (n-d)/2;$$

можно считать, что $T = 1$. (Напомним, что $\mathcal{U}_{\nu,T}^{(k,j)}$ — частная сумма ряда (4.7) при $\lambda_0 = \lambda_\nu$, $|\zeta|^2 + |\tau|^2 = 1$ и $y = \eta$, содержащая слагаемые с номерами $q \leqslant T-1$). Таким образом, формула (6.4) принимает вид

$$U(\eta) = \chi(\eta) \sum_{\nu,k,j} d_\nu^{(k,j)} u_\nu^{(k,j)}(\eta) + V(\eta), \tag{6.11}$$

где $j = 1, \dots, J_\nu$; $k = 0, \dots, \varkappa_{j,\nu} - 1$ и

$$u_\nu^{(k,j)}(\eta) = |\eta|^{i\lambda_\nu} \sum_{q=0}^{k} \frac{1}{q!} (i \log |\eta|)^q \varphi_\nu^{(k-q,j)}(\eta/|\eta|). \tag{6.12}$$

Вернемся к переменным $y = \eta/p$. Положим $u(y) = U(py)$, $f(y) = p^2 F(py)$ и вместо (6.2), (6.3) получим задачу

$$\mathcal{L}(D_y, \zeta, \tau) u(y) = f(y), \quad y \in \mathbb{K}, \tag{6.13}$$

$$u(y) = 0, \qquad y \in \partial\mathbb{K} \setminus 0. \tag{6.14}$$

Перепишем формулу (6.11) в новых переменных. Имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\varkappa_{j,\nu}-1} d_\nu^{(k,j)} u_\nu^{(k,j)}(\eta) \\
&= |py|^{i\lambda_\nu} \sum_{k=0}^{\varkappa_{j,\nu}-1} d_\nu^{(k,j)} \sum_{q=0}^{k} \frac{1}{q!} (i \log |y| + i \log p)^q \varphi_\nu^{(k-q,j)}(\omega) \\
&= p^{i\lambda_\nu} \sum_{k=0}^{\varkappa_{j,\nu}-1} d_\nu^{(k,j)} \sum_{q=0}^{k} \frac{1}{q!} (i \log p)^q u_\nu^{(k-q,j)}(y) \\
&= \sum_{k=0}^{\varkappa_{j,\nu}-1} u_\nu^{(k,j)}(y) \Big\{ p^{i\lambda_\nu} \sum_{q=0}^{\varkappa_{j,\nu}-k-1} \frac{1}{q!} (i \log p)^q d_\nu^{(k+q,j)} \Big\}.
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Обозначим через $c_\nu^{(k,j)}(p)$ выражение в фигурных скобках. Тогда равенство (6.11) примет вид

$$u(y) = \chi_p(y) \sum_{\nu,k,j} c_\nu^{(k,j)}(p) u_\nu^{(k,j)}(y) + v(y), \tag{6.16}$$

где $\chi_p(y) = \chi(py)$ и $v(y) = V(py)$.

§7. Задача в клине

Результаты о задаче в клине получаются с помощью обратного преобразования Фурье из утверждений о задаче с параметрами в конусе. Поэтому здесь мы ограничиваемся формулировками.

Рассмотрим задачу (1.8), (1.9) при $f \in V_0^0(Q;\gamma)$, $\gamma > 0$ (см. определение нормы в (1.4)). Пусть $\widehat{u}(\cdot,\zeta,\tau)$ — сильное решение задачи (1.10), (1.11) с правой частью $\widehat{f}(\cdot,\zeta,\tau) = F_{(z,t)\to(\zeta,\tau)} f(\cdot,z,t)$. Функцию u, определенную равенством $u(y,z,t) = F^{-1}_{(\zeta,\tau)\to(z,t)}\widehat{u}(y,\zeta,\tau)$, назовем сильным решением задачи (1.8), (1.9). Из теоремы 4.5 получается следующее утверждение.

Теорема 7.1. *Для всякой функции $f \in V_0^0(Q;\gamma)$ при любом $\gamma > 0$ существует единственное сильное решение u задачи* (1.8), (1.9). *Справедлива оценка*

$$\gamma\|u; V_0^1(Q;\gamma)\| \leqslant c\|f; V_0^0(Q;\gamma)\|,$$

в которой постоянная c не зависит от $\gamma > 0$.

Введем пространство $V_\beta^s(\partial Q;\gamma)$ функций на $\partial Q = \partial\mathbb{D}\times\mathbb{R}$ для $s = 0,1,\dots$ и $\beta\in\mathbb{R}$; норму определим равенством

$$\|w; V_\beta^s(\partial Q;\gamma)\| = \left(\int p^{d-n-1-2(\beta-s)}\|W(\cdot,\zeta,\tau); H_\beta^s(\partial\mathbb{K};1)\|^2\,d\zeta\,d\sigma\right)^{1/2},$$

где $W(\eta,\zeta,\tau) = \widehat{w}(p^{-1}\eta,\zeta,\tau)$, $\tau = \sigma - i\gamma$ и, как обычно, $p = (|\zeta|^2 + |\tau|^2)^{1/2}$. (Напомним, что норма в пространстве $H_\beta^s(\partial\mathbb{K};1)$ задана формулой (3.13) и следующим за этой формулой равенством.)

Рассмотрим задачу

$$\mathcal{L}(D_x,D_t)u = f \quad \text{на } \mathbb{D}\times\mathbb{R}, \tag{7.1}$$

$$u = g \quad \text{на } \partial\mathbb{D}\times\mathbb{R}. \tag{7.2}$$

Из теоремы 4.6 вытекает

Теорема 7.2. *Для всякого вектора* $\{f, g\} \in V_0^0(Q;\gamma) \times V_0^1(\partial Q;\gamma)$ *при любом* $\gamma > 0$ *существует единственное сильное решение задачи* (7.1), (7.2). *Верна оценка*

$$\gamma^2 \|u; V_0^1(Q;\gamma)\|^2 + \gamma \|D_\nu u; V_\gamma^0(\partial Q;\gamma)\|^2 \leqslant c\{\|f; V_0^0(Q;\gamma)\|^2 + \gamma \|g; V_0^1(\partial Q;\gamma)\|^2\}.$$

Постоянная c *не зависит от* γ.

Фиксируем функцию $\chi \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{K}})$, равную единице вблизи вершины конуса $\mathbb{K}$, и введем оператор

$$(\mathrm{X}u)(y,z,t) = F^{-1}_{(\zeta,\tau)\to(z,t)} \chi(py) F_{(z',t')\to(\zeta,\tau)} u(y,z',t').$$

Положим еще

$$(\Lambda u)(y,z,t) = F^{-1}_{(\zeta,\tau)\to(z,t)} p F_{(z',t')\to(\zeta,\tau)} u(y,z',t').$$

Для $\beta \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ и $q = 0, 1, \ldots$ определим пространство $\mathcal{D}V_{\beta,q}(Q;\gamma)$ с нормой

$$\|u; \mathcal{D}V_{\beta,q}(Q;\gamma)\| = (\|\mathrm{X}u, V^{2+q}_{\beta+q}(Q;\gamma)\|^2 + \gamma^2 \|u; V^{1+q}_{\beta+q}(Q;\gamma)\|^2)^{1/2}.$$

Пространство $\mathcal{R}V_{\beta,q}(Q;\gamma)$ наделяется нормой

$$\|f; \mathcal{R}V_{\beta,q}(Q;\gamma)\| = \left(\sum_{j=0}^{q} \gamma^{-2j} \|\Lambda^j f; V^{q-j}_{\beta+q-j}(Q;\gamma)\|^2 + \gamma^{-2(1+q)} \|\Lambda^{1-\beta+q} f; V_0^0(Q;\gamma)\|^2 \right)^{1/2}.$$

Пусть $\widehat{u}(\cdot,\zeta,\tau)$ — сильное (β, q)-решение задачи (1.10), (1.11). Функцию u, определенную равенством $u(y,z,t) = F^{-1}_{(\zeta,\tau)\to(z,t)} \widehat{u}(y,\zeta,\tau)$ назовем сильным (β, q)-решением задачи (1.8), (1.9). Следующее утверждение выводится из теоремы 5.3.

Теорема 7.3. 1) *Если* $\beta_1 < \beta \leqslant 1$, $q = 0, 1, \dots$ *и* $\gamma > 0$, *то для каждой функции* $f \in \mathcal{R}V_{\beta,q}(Q;\gamma)$ *существует единственное сильное* (β, q)*-решение и задачи* (1.8), (1.9). *Справедлива оценка*

$$\|u; \mathcal{D}V_{\beta,q}(Q;\gamma)\| \leqslant c(\beta,q)\|f; \mathcal{R}V_{\beta,q}(Q;\gamma)\|; \tag{7.3}$$

постоянная c *не зависит от* $\gamma > 0$.

2) *Если* $\beta \in (\beta_{l+1}, \beta_l)$, *то сильное* (β, q)*-решение существует лишь для функций* $f \in \mathcal{R}V_{\beta,q}(Q;\gamma)$, *подчиненных условиям*

$$(\widehat{f}(\cdot, \zeta, \tau), w_\nu^{(k,j)}(\cdot, \zeta, \overline{\tau})) = 0$$

при всех $\zeta \in \mathbb{R}^d$, $\tau = \sigma - i\gamma$ *(двойственность в* $L_2(\mathbb{K})$*); здесь* $w_\nu^{(k,j)}$ *— элементы базиса в пространстве* $\ker A_{\beta,q}(\zeta,\tau)^*$, *построенные в предложении* 5.2 *и отвечающие собственным числам* λ_ν *из полосы* (5.5). *Сильное* (β, q)*-решение единственно; выполняется неравенство* (7.3).

3) *Всякое сильное* (β, q)*-решение является сильным решением* $(\beta \leqslant 1)$. *Если существуют сильные* (β, q)*- и* (β', q')*-решения, то они совпадают.*

Для описания β-решений задачи (7.1), (7.2) понадобятся пространства $\mathcal{DV}_\beta(Q;\gamma)$ и $\mathcal{RV}_\beta(Q;\gamma)$. В первом из них норма определяется равенством

$$\begin{aligned}&\|u; \mathcal{DV}_\beta(Q;\gamma)\| \\ &\quad = (\|\mathrm{X}u; V^2_\beta(Q;\gamma)\|^2 + \gamma^2\|u; V^1_\beta(Q;\gamma)\|^2 + \gamma\|D_\nu u; V^0_\beta(\partial Q;\gamma)\|^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Пространство $\mathcal{RV}_\beta(Q;\gamma)$ векторов $\{f, g\}$ снабжается нормой

$$\begin{aligned}&\|\{f,g\}; \mathcal{RV}_\beta(Q;\gamma)\|^2 \\ &\quad = (\|f; V^0_\beta(Q;\gamma)\|^2 + \gamma^{-2}\|\Lambda^{1-\beta} f; V^0_0(Q;\gamma)\|^2 \\ &\qquad + \|\mathrm{X}g; V^{3/2}_\beta(\partial Q;\gamma)\|^2 + \gamma\|g; V^1_0(\partial Q;\gamma)\|^2 \\ &\qquad\qquad + \gamma^{-1}\|\Lambda^{1-\beta} g; V^1_0(\partial Q;\gamma)\|^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Теорема 7.4 (см. теорему 5.4). *Пусть выполнены условия предложения* 3.5. *Тогда*:

1) *Если* $\beta_1 < \beta \leqslant 1$, *то для* $\{f, g\} \in \mathcal{RV}_\beta(Q;\gamma)$ *существует единственное сильное* β*-решение и задачи* (7.1), (7.2) (*при всех* $\gamma > 0$). *Справедлива оценка*

$$\|u; \mathcal{DV}_\beta(Q;\gamma)\| \leqslant c(\beta)\|\{f,g\}; \mathcal{RV}_\beta(Q;\gamma)\| \tag{7.4}$$

с постоянной $c(\beta)$, *не зависящей от* γ.

2) *Если* $\beta \in (\beta_{l+1}, \beta_l)$, *то сильное* β*-решение существует лишь для векторов* $\{f, g\}$, *подчиненных условиям*

$$(\widehat{f}(\cdot,\zeta,\tau), w_\nu^{(k,j)}(\cdot,\zeta,\overline{\tau}))_{\mathbb{K}} + (\widehat{g}(\cdot,\zeta,\tau), T(D_y,\zeta)w_\nu^{(k,j)}(\cdot,\zeta,\overline{\tau}))_{\partial\mathbb{K}} = 0,$$

где $w_\nu^{(k,j)}$ — *те же, что в теореме* 7.3, *а* $T(D_y,\zeta)$ — *оператор из формулы Грина* (5.11). *Сильное* β*-решение единственно. Справедлива оценка* (7.4).

3) *Если существует сильное* β*-решение, то оно является и сильным решением.*

Остановимся еще на асимптотике решений задачи (1.8), (1.9); задача (7.1), (7.2) новых трудностей не доставляет.

Теорема 7.5. *Пусть числа* β *и* β' *удовлетворяют условиям, указанным перед формулой* (6.11). *Пусть еще* u — *сильное* β*-решение задачи* (1.8), (1.9) *и* $f \in \mathcal{RV}_{\beta'}(Q;\gamma)$. *Тогда справедливо представление*

$$u(y,z,t) = \sum (\mathrm{X}\check{c}_\nu^{(k,j)})(y,z,t)u_\nu^{(k,j)}(y) + v(y,z,t); \tag{7.5}$$

здесь

$$\check{c}_\nu^{(k,j)}(z,t) = F^{-1}_{(\zeta,\tau)\to(z,t)}c_\nu^{(k,j)}(\zeta,\tau),$$
$$c_\nu^{(k,j)}(\zeta,\tau) = p^{i\lambda_\nu}\sum_{q=0}^{\varkappa_{j,\nu}-k-1}\frac{1}{q!}(i\log p)^q d_\nu^{(k+q,j)}(\zeta,\tau),$$

функции $d_\nu^{(k+q,j)}$ *заданы формулами*

$$d_\nu^{(k+q,j)}(\zeta,\tau) = p^{-2}(\widehat{f}(\cdot/p,\zeta,\tau), \mathcal{W}_\nu^{(k,j)}(\cdot))_{\mathbb{K}} \tag{7.6}$$

(*ср.* (6.5)) *и подчиняются неравенствам*

$$\|\check{d}_\nu^{(k,j)}; H^{(d-n)/2+4-2\beta'}(\mathbb{R}^{d+1})\| \leqslant c\|f; \mathcal{R}V_{\beta'}(Q;\gamma)\|. \tag{7.7}$$

(*Оператор* X *определен после теоремы* 7.2). *В асимптотике* (7.5) *присутствуют слагаемые, отвечающие собственным числам* λ_ν *из полосы* $\beta' < \operatorname{Im}\lambda + 2 - (n - d)/2 < \beta$. *Для остатка* v *в* (7.5) *справедлива оценка*

$$\|v; \mathcal{D}V_{\beta'}(Q;\gamma)\| \leqslant c\|f; \mathcal{R}V_{\beta'}(Q;\gamma)\|.$$

Доказательство. Формула (7.5) является следствием равенства (6.16). Выражения (7.6) вытекают из соотношений (6.5) (нужно учесть связь между правыми частями задач (6.2), (6.3) и (6.13), (6.14)). Для вывода неравенства (7.7) надо воспользоваться оценкой

$$|d_\nu^{(k,j)}(\zeta,\tau)| \leqslant p^{-2}\|\widehat{f}(\cdot/p,\zeta,\tau); \mathcal{R}H_{\beta'}(\mathbb{K};1)\|$$

(которая получается из представлений (7.6)) и связью норм

$$\|f; \mathcal{R}V_{\beta'}(Q;\gamma)\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^{d+1}} p^{d-n-2\beta'}\|\widehat{f}(\cdot/p,\zeta,\tau); \mathcal{R}H_{\beta'}(\mathbb{K};1)\|^2 d\zeta d\sigma. \quad \bullet$$

Добавление (доказательство предложения 3.5 для случая $n-d=2$). Мы должны проверить неравенство (3.14) без дополнительного предположения $v\,|\,\partial\mathbb{K} = 0$ в случае $n-d=2$. Это будет сделано в несколько шагов. В частности, мы введем „обобщенное“ решение задачи в конусе и обсудим его дифференциальные свойства. (Отметим, что доказательство существования такого решения вместе с исследованием его свойств по существу эквивалентно проверке равенства $\operatorname{Im}\mathcal{A}(\zeta,\tau) = L_2(\mathbb{K}) \times H_0^1(\partial\mathbb{K};p)$).

Рассмотрим задачу

$$\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)w = 0 \quad \text{в } \mathbb{K}, \tag{1}$$

$$w = v \quad \text{на } \partial\mathbb{K}\setminus 0, \tag{2}$$

где v — элемент линеала $\mathcal{D}_1$. Запишем формулу Грина (5.11) для $u, w \in \mathcal{D}_1$. Если $u \mid \partial\mathbb{K} = 0$, а функция w удовлетворяет уравнениям (1), (2), то формула Грина принимает вид

$$(v, T(D_y, \zeta)u)_{\partial\mathbb{K}} = (w, \mathcal{L}(D_y, \zeta, \overline{\tau})u)_{\mathbb{K}}. \tag{3}$$

Обобщенным решением задачи (1), (2) назовем функцию $w \in L_2(\mathbb{K})$, удовлетворяющую тождеству (3) при всех $u \in \mathring{\mathcal{D}}_1$.

Убедимся в существовании обобщенного решения. Функционал

$$L_2(\mathbb{K}) \ni f := \mathcal{L}(D_y, \zeta, \overline{\tau})u \mapsto (v, T(D_y, \zeta)u)_{\partial\mathbb{K}} \tag{4}$$

ограничен. В самом деле, оценка (3.16) сохраняется при замене τ на $\overline{\tau}$. Поэтому в силу (3.16)

$$|(v, T(D_y, \zeta)u)_{\partial\mathbb{K}}| \leqslant c\|\mathcal{L}(D_y, \zeta, \overline{\tau})u\|.$$

Распространим функционал (4) на все пространство $L_2(\mathbb{K})$, сохранив норму. По теореме Рисса существует элемент $w \in L_2(\mathbb{K})$, для которого выполняется равенство (3). Благодаря локальным свойствам решений эллиптических задач функция w оказывается гладкой на $\overline{\mathbb{K}} \setminus 0$ и подчиняется уравнениям (1), (2). Для того чтобы получить информацию о поведении w вблизи вершины угла и на бесконечности, применяются те же приемы, что и в доказательстве тривиальности ядра $\ker A(\zeta, \tau)^*$. Действительно, функция v в краевом условии (2) имеет компактный носитель на $\partial\mathbb{K} \setminus 0$. Поэтому быстрое убывание w на бесконечности доказывается так же, как предложение 4.3. Асимптотика w у вершины имеет вид

$$w \sim \sum c_\mu^{(k,j)} U_\mu^{(k,j)}$$

(см. (4.8)). Покажем, что справа могут присутствовать лишь те слагаемые, для которых $\chi u_\mu^{(k,j)} \in \overset{\circ}{H}{}^1_0(\mathbb{K})$; здесь $u_\mu^{(k,j)}$ — главная часть $U_\mu^{(k,j)}$ (формула (4.4) при $\lambda_0 = \lambda_\mu$), $\chi \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{K}})$, $\chi = 1$ около вершины угла. Заметим, что если функция $u \in \mathcal{D}_1$ такова, что $\partial\mathbb{K} \cap \operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} v = \varnothing$, то $(w, \mathcal{L}(D_y, \zeta, \overline{\tau})u)_{\mathbb{K}} = 0$ в силу (3). Это позволяет теми же рассуждениями, что и в доказательстве предложения 4.4, установить, что нежелательных слагаемых в асимптотике w нет.

Указанных свойств w достаточно для того, чтобы эта функция подчинялась оценке (3.16), которая принимает вид

$$\gamma^2(\|\nabla w\|^2 + p^2\|w\|^2) + \gamma\langle D_\nu w\rangle^2 \leqslant c\gamma\{\langle\nabla_\tau v\rangle^2 + p^2\langle v\rangle^2\}. \tag{5}$$

Кроме того, понадобится неравенство

$$\int_{\mathbb{K}} \frac{|w(x)|^2}{|x|^2} dx \leqslant c \Big\{ \int_{\partial\mathbb{K}} \frac{|w(x)|^2}{|x|} ds + \int_{\mathbb{K}} |\nabla w(x)|^2 dx \Big\}. \tag{6}$$

Для его проверки положим $\mathbb{K} = \{(r, \omega) : |\omega| < \alpha\}$ и учтем, что

$$w(r, \omega) = w(r, -\alpha) + \int_{\alpha}^{\omega} \frac{\partial w}{\partial \omega}(r, \omega) d\omega.$$

Значит,

$$|w(r,\omega)|^2 \leqslant c \Big\{ |w(r, -\alpha)|^2 + \int_{-\alpha}^{\alpha} \Big| \frac{\partial w}{\partial \omega}(r, \omega) \Big|^2 d\omega \Big\}$$
$$\leqslant c \Big\{ |w(r, -\alpha)|^2 + r^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} |\nabla w(r, \omega)|^2 d\omega \Big\}.$$

Отсюда вытекает формула (6).

Перейдем к доказательству неравенства (3.14) для случая $n - d = 2$. Пусть $v \in \mathcal{D}_1$ и w — решение задачи (1), (2). Применяя оценку (3.16) для разности $v - w$, имеем

$$\gamma^2 (\|\nabla(v - w)\|^2 + p^2 \|v - w\|^2) + \gamma \langle D_\nu (v - w) \rangle^2 \leqslant c \|\mathcal{L}(D_y, \zeta, \tau) v\|^2.$$

Функция $v - w$ аннулируется на $\partial\mathbb{K}$, поэтому из неравенства (6) следует, что

$$\int_{\mathbb{K}} \frac{|v(y) - w(y)|^2}{|y|^2} dy \leqslant c \int_{\mathbb{K}} |\nabla(v(y) - w(y))|^2 dy.$$

Значит,

$$\gamma^2 \|v - w; H_0^1(\mathbb{K}; p)\|^2 + \gamma \langle D_\nu (v - w) \rangle^2 \leqslant c \|\mathcal{L}(D_y, \zeta, \tau) v\|^2.$$

Отсюда выводим, что

$$\begin{aligned}&\gamma^2\|v; H_0^1(\mathbb{K};p)\|^2+\gamma\langle D_\nu v\rangle^2\\&\qquad\leqslant c\{\|\mathcal{L}(D_y,\zeta,\tau)v\|^2+\gamma^2\|w; H_0^1(\mathbb{K};p)\|^2+\gamma\langle D_\nu w\rangle^2\}.\end{aligned}\tag{7}$$

Согласно (5), третье слагаемое справа в (7) не превосходит $c\gamma\|v; H_0^1(\partial\mathbb{K};p)\|^2$. Оценим второе слагаемое. По определению нормы в $H_0^1(\mathbb{K},p)$

$$\gamma^2\|w; H_0^1(\mathbb{K};p)\|^2=\gamma^2\Big\{\|\nabla w\|^2+p^2\|w\|^2+\int\limits_{\mathbb{K}}\frac{|w(y)|^2}{|y|^2}dy\Big\}.\tag{8}$$

В силу (5) первые два слагаемых справа в (8) не больше, чем $c\gamma\|v; H_0^1(\partial\mathbb{K};p)\|^2$. Из неравенств (5) и (6) следует, что

$$\gamma^2\int\limits_{\mathbb{K}}\frac{|w(y)|^2}{|y|^2}dy\leqslant c\gamma^2\int\limits_{\partial\mathbb{K}}\frac{|w(y)|^2}{|y|}ds+c\gamma\|v; H_0^1(\partial\mathbb{K};p)\|^2.$$

Таким образом, осталось оценить интеграл из правой части последней формулы. Имеем (при $\omega=\pm\alpha$)

$$\begin{aligned}\gamma^2\int\limits_0^\infty\frac{|w(r,\omega)|^2}{r}dr&=\gamma^2\Big\{\int\limits_0^{1/p}\frac{|w(r,\omega)|^2}{r}dr+\int\limits_{1/p}^\infty\frac{|w(r,\omega)|^2}{r}dr\Big\}\\&\leqslant\gamma^2\Big\{\int\limits_0^1\frac{w(r/p,\omega)}{r^2}dr+p\langle w\rangle^2\Big\}.\end{aligned}$$

Учитывая, что $p=(|\zeta|^2+|\sigma|^2+\gamma^2)^{1/2}\geqslant\gamma$, получаем

$$\begin{aligned}\gamma^2\int\limits_0^\infty\frac{|w(r,\omega)|^2}{r}dr&\leqslant\gamma^2\Big\{\frac{1}{p}\int\limits_0^\infty\frac{|w(r,\omega)|^2}{r^2}dr+p\langle w\rangle^2\Big\}\\&\leqslant\gamma\Big\{\int\limits_0^\infty\frac{|w(r,\omega)|^2}{r^2}dr+p^2\langle w\rangle^2\Big\}\\&\leqslant\gamma\|w; H_0^1(\partial\mathbb{K};p)\|^2=\gamma\|v; H_0^1(\partial\mathbb{K};p)\|^2,\end{aligned}$$

что и требовалось.

Список литературы

[1] Пламеневский Б. А., *О волновом уравнении в цилиндре с ребрами*, Функц. анал. и его прил. **32** (1998), № 1, 81–84.

[2] Пламеневский Б. А., *О задаче Дирихле для волнового уравнения в цилиндре с ребрами*, Алгебра и анализ **10** (1998), № 2, 197–228. (Поправка, **10** (1998), № 3, 224).

[3] Kreiss H.-O., *Initial boundary value problems for hyperbolic systems*, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 277–298.

[4] Sakamoto R., *Hyperbolic boundary value problems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1982.

[5] Агранович М. С., *Граничные задачи для систем с параметром*, Мат. сб. **84** (1971), № 1, 27–65.

[6] Chazarin J., Piriou A., *Introduction to the theory of linear partial differential equations*, Stud. Math. Appl., vol. 14, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1982.

[7] Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г., *Метод энергетических оценок в смешанной задаче*, Успехи мат. наук **35** (1980), № 5, 53–120.

[8] Gårding L., Le problème de la dérivée oblique pour l'équation des ondes, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B **285** (1977), A773–A775 (Rectification, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B **286** (1978), A1199).

[9] Хёрмандер Л., *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*. Т. 3. *Псевдодифференциальные операторы*, Мир, М., 1987.

[10] Кондратьев В. А., *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками*, Тр. Моск. мат. о-ва **16** (1967), 209–292.

[11] Мазья В. Г., Пламеневский Б. А., *О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в конусе*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **52** (1975), 110–127.

[12] Мазья В. Г., Пламеневский Б. А., *О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками*, Math. Nachr. **76** (1977), 29–60.

[13] Назаров С. А., Пламеневский Б. А., *Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей*, Наука, М., 1991.

[14] Агранович М. С., Вишик М. И., *Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида*, Успехи мат. наук **19** (1964), № 3, 53–161.

[15] Гохберг И. Ц., Сигал Е. И., *Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше*, Мат. сб. **84** (1971), № 4, 607–629.

[16] Козлов В. А., Мазья В. Г., *Спектральные свойства операторных пучков, порожденных эллиптическими краевыми задачами в конусе*, Функц. анал. и его прил. **22** (1988), № 2, 38–46.

[17] Мазья В. Г., Пламеневский Б. А., *L_p-оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами*, Тр. Моск. мат. о-ва **37** (1978), 49–93.

[18] Maz'ya V. G., Rossmann J., *Über die Asymptotik der Lösungen elliptischer Randwertaufgaben in der Umgebung von Kanten*, Math. Nachr. **138** (1988), 27–53.

[19] Eskin G., *The wave equation in a wedge with general boundary conditions*, Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), no. 1–2, 99–160.

[20] Cheeger J., Taylor M., *On the diffraction of waves by conical singularities.* I, II, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), 275–331, 487–529.

[21] Uchida M., *Microlocal analysis of diffraction by a corner*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **25** (1992), no. 1, 47–75.

[22] Gérard P., Lebeau G., *Diffusion d'une onde par un coin*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), no. 2, 341–424.

[23] Боровиков В. А., *Дифракция на многоугольниках и многогранниках*, Наука, М., 1966.

[24] Поручиков В. Б., *Методы динамической теории упругости*, Наука, М., 1986.

[25] Добрушкин В. А., *Краевые задачи динамической теории упругости для клиновидных областей*, Наука и техника, Минск, 1988.

[26] Мельников И. И., *Особенности решения смешанной задачи для гиперболических уравнений второго порядка в областях с кусочно-гладкой границей*, Успехи мат. наук **37** (1982), № 1, 149–150.

Поступило 15 июля 1998 г.

С.-Петербургский
университет телекоммуникаций
кафедра высшей математики
E-mail: kokotov@sut.ru

С.-Петербургский
государственный университет
физический факультет
E-mail: Boris.Plamenevskij@pobox.spbu.ru